

Encerramos a aula anterior com o T.F.C.  
para campos vetoriais:

$\vec{F}: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  um campo conservativo.

e  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  um caminho qualquer de

$\gamma(a) = (x_0, y_0)$  até  $\gamma(b) = (x_1, y_1)$ ;  $\gamma$  localmente suave, simples.

Então, vimos que

$\int_{\gamma} \vec{F} d\vec{\gamma}$  independe do caminho  $\gamma$ ,

$$\int_{\gamma} \vec{F} d\vec{\gamma} = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt =$$

$$= \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a)) =$$

$$= \varphi(x_1, y_1) - \varphi(x_0, y_0),$$

onde  $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função potencial,  
ou seja,  $\nabla \varphi = \vec{F}$ .

obs: Outra forma de exercer o T.F.C. para campos vetoriais é:

$$\int_{\gamma} \nabla \varphi d\vec{\gamma} = \varphi(b) - \varphi(a)$$

obs: Este teorema, embora apresentado para campos no  $\mathbb{R}^2$ , vale para campos no  $\mathbb{R}^n$ .

Vejamos um exemplo de aplicação do T.F.C.

Ex: Considere o campo:

$$\vec{F}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \\ F(x, y) = (\underbrace{y^2 + 2x + 4}_P, \overbrace{2xy + 4y - 5}_Q)$$

Este campo é um campo gradiente, pois sendo  $P(x, y) = y^2 + 2x + 4$  e

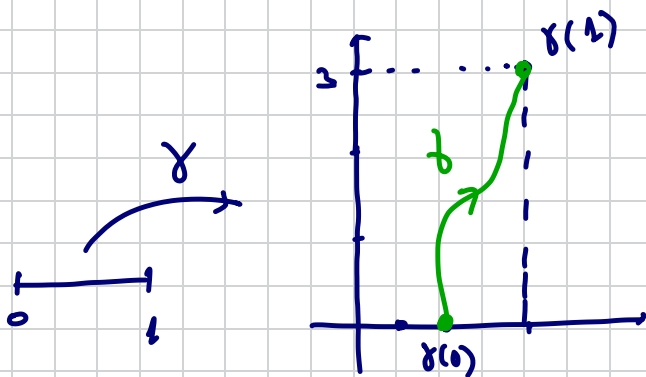
$$Q(x, y) = 2xy + 4y - 5,$$

então,  $\frac{\partial P}{\partial y} = 2y = \frac{\partial Q}{\partial x}$ , e são contínuos.

Considere a função potencial  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  
 dada por:

$$\varphi(x, y) = y^2x + x^2 + 4x + 2y^2 - 5y + K$$

Considere um caminho  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$   
 qualquer, tal que  $\gamma(0) = (1, 0)$ ;  $\gamma(1) = (2, 3)$ .



Como o campo  $\vec{F}$   
 é gradiente, então,  
 pelo T.F.C.,  
 obtemos:

$$\varphi(x, y) = y^2x + x^2 + 4x + 2y^2 - 5y + K$$

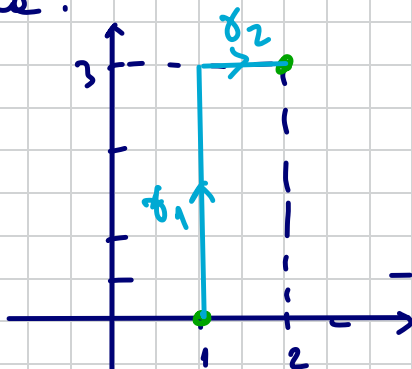
$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} &= \varphi(\gamma(1)) - \varphi(\gamma(0)) = \\ &= \varphi(2, 3) - \varphi(1, 0) \\ &= 3^2 \cdot 2 + (2)^2 + 4 \cdot (2) + 2 \cdot (3)^2 - 5 \cdot 3 + K - (0 + 1^2 + \\ &= 4 \cdot (1) + 0 + 0 + K) = \end{aligned}$$

$$= 18 + 4 + 8 + 18 - 15 - 1 - 4 - 1 = 28$$

Se tomarmos uma parametrização  $\gamma$  qualquer que ligue os pontos  $(1,0)$  e  $(2,3)$  vamos encontrar também

$$\int_{\gamma} \vec{F} d\vec{\gamma} = 58$$

Por exemplo, tome os segmentos conforme o esquema:



$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$$

$$\int_{\gamma} \vec{F} d\vec{\gamma} = \int_{\gamma_1} \vec{F} d\vec{\gamma} + \int_{\gamma_2} \vec{F} d\vec{\gamma}$$

parametrizações:

$$\gamma_1: \begin{cases} x=1 \\ y=t \end{cases} ; 0 \leq t \leq 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} dx = 0 dt = 0 \\ dy = 1 dt = dt \end{cases}$$

$$\gamma_1(t) = (1, t)$$

$$\gamma_2'(t) = (0, 1)$$

Ans:im, here we get:

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} = \int_0^3 \vec{F}(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) dt$$

$$= \int_0^3 \vec{F}(1, t) \cdot (0, 1) dt =$$

$$= \int_0^3 (t^2 + 2 \cdot 1 + 4, 2 \cdot 1 \cdot t + 4 \cdot t - 5) \cdot (0, 1) dt =$$

$$\vec{F}(x, y) = (y^2 + 2x + 4, 2xy + 4y - 5)$$

$$= \int_0^3 (t^2 + 6, 6t - 5) \cdot (0, 1) dt =$$

$$= \int_0^3 ((t^2 + 6) \cdot 0 + (6t - 5) \cdot 1) dt$$

$$= \int_0^3 (6t - 5) dt = \left( 3t^2 - 5t \right) \Big|_0^3 =$$

$$= 3 \cdot (3)^2 - 5 \cdot 3 - 0 = 27 - 15 = \underline{\underline{12}}$$

Seo curvulo  $\sigma_2$ , tenemur:

$$\sigma_2: \begin{cases} x=t \\ y=3 \end{cases}; \quad 1 \leq t \leq 2$$

$$\Rightarrow \sigma_2(t) = (t, 3) \quad . \quad \sigma_2'(t) = (1, 0)$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{F}(\sigma_2(t))} = \vec{F}(t, 3) =$$

$$\vec{F}(x, y) = (y^2 + 2x + 4, 2xy + 4y - 5)$$

$$= ((3)^2 + 2 \cdot t + 4, 2 \cdot t \cdot 3 + 4 \cdot 3 - 5)$$

$$= (\underline{2t + 13}, \underline{6t + 7}) .$$

Amim, tenemur:

$$\int_{\sigma_2} \underline{\vec{F}(\sigma_2(t))} \cdot \sigma_2'(t) dt = \int_1^2 (2t + 13, 6t + 7) \cdot (1, 0) \cdot dt$$

$$= \int_1^2 (2t + 13 + 0) \cdot dt = \int_1^2 (2t + 13) dt =$$

$$\begin{aligned}
 &= (t^2 + 13t) \Big|_1^2 = (2^2 + 13 \cdot 2) - (1^2 + 13 \cdot 1) \\
 &= 4 + 26 - 1 - 13 = 3 + 13 = \underline{\underline{16}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Então: } \int_{\gamma} \vec{F}' d\vec{\gamma} &= \int_{\gamma_1} \vec{F}' d\vec{\gamma}_1 + \int_{\gamma_2} \vec{F}' d\vec{\gamma}_2 \\
 &= 12 + 16 = \underline{\underline{28}},
 \end{aligned}$$

o mesmo resultado já encontrado quando se aplicou o T.F.C.



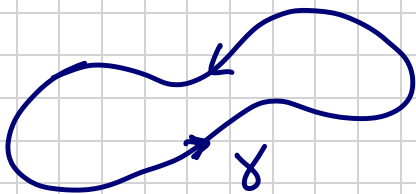
NOTAÇÃO: Quando o caminho  $\gamma$  for um caminho fechado, a integral de linha ao longo de  $\gamma$  de um campo  $\vec{F}$  continua ser representada por:

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Às vezes põe-se uma seta para indicar a orientação. Por exemplo:

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

está indicando que o caminho  $\gamma$  é fechado, e o sentido é o anti-horário (sentido positivo)



Uma consequência do T.F.C para campos  
vetoriais é o seguinte corolário:

corolário Se o caminho  $\gamma$  for um  
caminho fechado, então

$$\oint_{\gamma} \vec{F} d\vec{\pi} = 0,$$

onde  $\vec{F}$  é um campo gradiente (conservativo)

---







