

Nesta aula vamos estudar o importante teorema de GREEN:

$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva fechada, recorrendo mente nome a $\vec{F} = (P(x, y), Q(x, y))$ um campo vetorial C^1 . Então,

$$\oint_{\gamma} P dx + Q dy = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA,$$

onde Ω é a região interna à curva γ .

Vamos também o conceito de uma curva parametrizada pelo comprimento de arco.

Mostremos que $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é parametrizada pelo comprimento de arco se, e somente se,

$$\|\gamma'(t)\| = 1.$$

Seguindo nosso estudo, apresentaremos versões vetoriais do teorema de GREEN, chamados de TEOREMA DE GAUSS e o TEOREMA DE STOKES.

Seja $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva fechada, simples, seccionalmente suave, e parametrizada pelo comprimento de arco, dada por

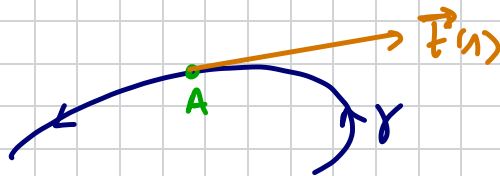
$$\gamma(s) = (x(s), y(s))$$

Vamos denotar o vetor tangente à γ em um ponto A qualquer por $\vec{T}(s) = \gamma'(s)$.

Ou seja,

$$\vec{T}(s) = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds} \right);$$

e exigindo que $\|\vec{T}(s)\| = \|\gamma'(s)\| = 1$.



Definimos o vetor $\vec{n}(s)$ por:

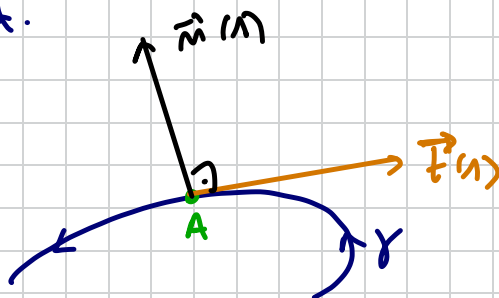
$$\vec{n}(s) = \left(\frac{dy}{ds}, -\frac{dx}{ds} \right)$$

Note que:

$$\begin{aligned} \underline{\vec{T}(s) \cdot \vec{n}(s)} &= \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds} \right) \cdot \left(\frac{dy}{ds}, -\frac{dx}{ds} \right) \\ &= \frac{dx}{ds} \cdot \frac{dy}{ds} - \frac{dy}{ds} \cdot \frac{dx}{ds} = \underline{0} \end{aligned}$$

Logo $\vec{n}(s)$ é $\vec{T}(s)$.

O vetor $\vec{n}(s)$ é chamado de vetor normal a γ no ponto A .



Dessa forma, sendo $\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ um campo vetorial C^1 , temos:

$$\begin{aligned}\vec{F} \cdot \vec{n}(s) &= (P, Q) \cdot \left(\frac{dy}{ds}, -\frac{dx}{ds} \right) \\ &= P \cdot \frac{dy}{ds} - Q \cdot \frac{dx}{ds}.\end{aligned}$$

Então; calculando a integral ao longo de γ para $\vec{F} \cdot \vec{n}(s)$, temos:

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{n}(s) ds = \oint_{\gamma} \left(P \cdot \frac{dy}{ds} - Q \cdot \frac{dx}{ds} \right) ds =$$

$$= \oint_{\gamma} P dy - Q dx = \oint_{\gamma} (-Q) dx + P dy$$

$$= \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial P}{\partial x} - \left(-\frac{\partial Q}{\partial y} \right) \right] dA =$$

↑
T. DE GREEN

$$= \iint_{\Omega} \underbrace{\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right)}_{\text{div } \vec{F}} dA = \iint_{\Omega} \text{div } \vec{F} \cdot dA.$$

$$\Rightarrow \oint_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{n}(s) ds = \iint_{\Omega} \text{div } \vec{F} \cdot dA$$

Da seja, acabamos de provar o seguinte resultado:

TEOREMA DA DIVERGÊNCIA OU DE GAUSS :

Sejam $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva fechada, reccionalmente suave, simples, parametrizada pelo comprimento de arco, e $\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ um campo vetorial com $P, Q \in C^1$; e seja $\vec{n}(s)$ um vetor normal a γ . Então:

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{n}(s) ds = \iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} \cdot dA,$$

onde Ω é a região interna, encerrada pela curva γ .

Da mesma forma, se considerarmos o vetor tangente $\vec{T}(s)$, teremos:

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot \vec{T}(s) ds &= (P, Q) \cdot \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds} \right) \cdot ds \\ &= P dx + Q dy \end{aligned}$$

Anu'm :

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{T}(\gamma) \cdot d\gamma = \oint_{\gamma} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

TEOREMA DE
GREEN

$$\Rightarrow \oint_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{T}(\gamma) d\gamma = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA. (*)$$

Considere a função $\vec{F} = (P, Q, R)$, onde

$$\begin{cases} P = P(x, y) \\ Q = Q(x, y) \\ R \equiv 0 \end{cases}$$

Então o rotacional do campo $\vec{F}$ será dado por:

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} =$$

$$= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}$$

Disso, $\underbrace{\text{rot } \vec{F} \cdot \vec{k}} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \underbrace{\vec{k} \cdot \vec{k}}_{=1} = \underbrace{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}$

Assim, (*) fica:

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{T}(s) ds = \iint_{\Sigma} \underbrace{\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)}_{\text{rot } \vec{F} \cdot \vec{k}} dA$$

$$\Rightarrow \oint_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{T}(s) ds = \iint_{\Sigma} \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{k} \cdot dA$$

Daí se, acabamos de mostrar o seguinte resultado:

TEOREMA DE STOKES:

Sejam $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva fechada, reccionalmente suave, simples, parametrizada pelo comprimento de arco, e $\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ um campo vetorial com $P, Q \in C^1$; e seja $\vec{T}(t)$ um vetor tangente a γ . Então:

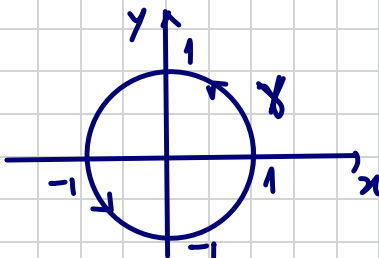
$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{T}(t) dt = \iint_{\Omega} \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{k} \cdot dA,$$

onde Ω é a região interna encerrada pela curva γ .

Vejam os um exemplo de aplicação:

Exemplo: Verifique o teorema da divergência para o campo vetorial $\vec{F}(x, y) = (2y, 5xy)$ na circunferência $x^2 + y^2 = 1$.

Solução:



$$\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\gamma(t) = (x(t), y(t));$$

onde:

$$x(t) = \cos t \quad \text{e} \quad y(t) = \sin t$$

$$\Rightarrow \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$$

Note que γ é parametrizada pelo comprimento de arco, pois sendo $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$, tem-se que

$$\begin{aligned} \|\gamma'(t)\| &= \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = \\ &= \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = \sqrt{1} = 1. \end{aligned}$$

O teorema de divergência estabelece que

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{n}(t) \, dt = \iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} \, dA.$$

No nosso caso, temos; como

$$\begin{aligned} \vec{n}(t) &= \left(\frac{dy}{dx}, -\frac{dx}{dy} \right) = (\cos t, -(-\sin t)) \\ &= (\cos t, \sin t), \end{aligned}$$

segue que:

$$\vec{F} \cdot \vec{m}(t) = (P, Q) \cdot (\cos t, \sin t)$$

$$= (24, 524) \cdot (\cos t, \sin t)$$

$$= (2 \cdot \sin t, 5 \cdot \cos t \cdot \sin t) \cdot (\cos t, \sin t)$$

$$= 2 \cdot \sin t \cdot \cos t + 5 \cdot (\sin t)^2 \cdot \cos t$$

$$\Rightarrow \oint_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{m}(t) dt = \int_0^{2\pi} (2 \sin t \cdot \cos t + 5 \cdot (\sin t)^2 \cdot \cos t) dt$$

$$= 2 \int_0^{2\pi} (\sin t)^1 \cdot \underbrace{\cos t}_{dr} dt + 5 \cdot \int_0^{2\pi} (\sin t)^2 \cdot \underbrace{\cos t}_{dr} dt =$$

$$\int r^k dr = \frac{r^{k+1}}{k+1} + C$$

$$r = \sin t \Rightarrow dr = \cos t dt$$

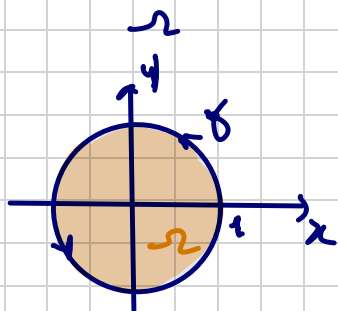
$$= 2 \cdot \left(\frac{\sin^2 t}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} + 5 \cdot \left(\frac{\sin^3 t}{3} \right) \Big|_0^{2\pi} =$$

$$= \underbrace{\sin^2 2\pi}_{=0} - \underbrace{\sin^2 0}_{=0} + \frac{5}{3} \cdot \underbrace{\sin^3 2\pi}_{=0} - \underbrace{\sin^3 0}_{=0} = 0 //$$

$$\Rightarrow \oint_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{n}(\gamma) \cdot d\gamma = 0 \quad (*)$$

Por outro lado,

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} \cdot dA =$$



$$\vec{F} = (\underbrace{2y}_{F_1}, \underbrace{5xy}_{F_2})$$

$$\Rightarrow \operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} = 0 + 5x$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{div} \vec{F} = 5x}$$

Portanto:

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} \cdot dA = \iint_{\Omega} 5x \, dx \, dy =$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{\rho=0}^{\rho=1} \underbrace{5 \cdot \rho \cdot \cos \theta}_{x} \cdot \underbrace{\rho \, d\rho \, d\theta}_{dx \, dy} = 5 \cdot \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \cos \theta \cdot d\theta \int_{\rho=0}^{\rho=1} \rho^2 \, d\rho$$

COORDENADAS
POLARES

$$= 5 \cdot \sin \theta \Big|_0^{2\pi} \cdot \frac{\rho^3}{3} \Big|_0^1 = 5 \left(\underbrace{\sin 2\pi}_{=0} - \underbrace{\sin 0}_{=0} \right) \cdot \left(\frac{1}{3} - 0 \right) = 0 //$$

$$\Rightarrow \boxed{\iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} \cdot dA = 0} \quad (\text{II})$$

De (I) e (II) segue que

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{n}(\eta) d\eta = 0 = \iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} dA.$$

~~~~ FIM DO CONTEÚDO ~~~~

## RESOLUÇÃO DE EXERCÍCIOS DA LISTA 12

12. Sejam  $u$  e  $v$  funções escalares possuindo derivadas parciais primeiras contínuas no domínio aberto e conexo  $\Omega$  do plano  $xy$ . Seja  $\gamma$  uma curva suave fechada simples em  $\Omega$ . Mostre que

$$\oint_{\gamma} uv \, dx + uv \, dy = \iint_{\Omega} \left[ v \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + u \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] dA.$$

Solução: Seja  $T$  de GREEN:

$$\oint_{\gamma} P \, dx + Q \, dy = \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

No nosso caso, temos  $\begin{cases} P = u \cdot v \\ Q = u \cdot v \end{cases}$ , onde  $\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$

$$\text{Então: } \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (u \cdot v) = u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (u \cdot v) = u \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$$

Assim:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \left( u \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$= \underbrace{u \cdot \frac{\partial v}{\partial x}}_{\text{green}} + \underbrace{v \cdot \frac{\partial u}{\partial x}}_{\text{orange}} - \underbrace{u \cdot \frac{\partial v}{\partial y}}_{\text{green}} - \underbrace{v \cdot \frac{\partial u}{\partial y}}_{\text{orange}}$$

$$= \underbrace{u \cdot \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + v \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)}_{\text{blue wavy line}}$$

Dito, segue que; do T. de Green:

$$\oint_{\gamma} \underbrace{p dx}_{u \cdot v} + \underbrace{q dy}_{u \cdot v} = \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) dA$$

$$\oint_{\gamma} u v dx + u \cdot v dy = \iint_{\Omega} \left[ u \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + v \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] dA$$

~~~~~

13. Use o Teorema da Divergência para mostrar que, dado um campo escalar $g : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ com derivadas parciais contínuas até a segunda ordem no aberto Ω e γ uma curva suave fechada simples em Ω , então

$$\oint_{\gamma} g \frac{\partial g}{\partial \vec{n}} ds = \iint_{\Omega} (g \Delta g + \|\nabla g\|^2) dA.$$

Obs.: a quantidade $\nabla g \cdot \vec{n} := \frac{\partial g}{\partial \vec{n}}$ aparece na integral de linha. A derivada direcional de g na direção do vetor normal $\vec{n}$ é chamada de *derivada normal* de g .

Solução: Queremos mostrar que:

$$\oint_{\gamma} \underbrace{g \cdot \nabla g \cdot \vec{n}(s)}_{F} ds = \iint_{\Omega} (g \cdot \Delta g + \|\nabla g\|^2) dA.$$

pelo teorema da divergência:

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{n}(s) ds = \iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} \cdot dA;$$

considere

$$\underline{\vec{F}} = g \cdot \nabla g = g \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y} \right) = \left(\underbrace{g \cdot \frac{\partial g}{\partial x}}_{F_1}, \underbrace{g \cdot \frac{\partial g}{\partial y}}_{F_2} \right)$$

Assim, a divergência de $\vec{F}$ será:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(g \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(g \cdot \frac{\partial g}{\partial y} \right)$$

(u.v)' (u.v)'

$$= g \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right) + \frac{\partial g}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} + g \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right) + \frac{\partial g}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial y}$$

$$= g \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)^2 + g \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)^2$$

$$= g \cdot \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)^2 =$$

Δg

$$\begin{aligned} \|\nabla g\| &= \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)^2} \\ &\Rightarrow \|\nabla g\|^2 \end{aligned}$$

$$= g \cdot \Delta g + \|\nabla g\|^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{div} \vec{F} = \underline{g \cdot \Delta g + \|\nabla g\|^2}}$$

Disso, obtenem:

$$\oint_{\gamma} \underbrace{\vec{F}}_{\substack{\uparrow \\ g \cdot \nabla g}} \cdot \vec{n} \, d\lambda = \iint_{\Sigma} \underline{\underline{\operatorname{div} \vec{F}}} \cdot dA$$

$$\oint_{\gamma} g \cdot \nabla g \cdot \vec{n}(\lambda) \, d\lambda = \iint_{\Sigma} (g \cdot \Delta g + |\nabla g|^2) \, dA.$$

