

Na aula passada iniciamos o estudo de campos
vetoriais $\vec{F}: \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$x \in \Omega \subset \mathbb{R}^m \mapsto \vec{F}(x) \in \mathbb{R}^m.$$

Vimos que um campo $\vec{F}$ é um campo conservativo
(campo gradiente) se $\exists \varphi: \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ função
escalar tal que $\nabla \varphi = \vec{F}$. (φ é chamada de
função potencial)

Vimos também o conceito de divergente de
um campo vetorial $\vec{F}: \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$:

Dado $\vec{F}(x_1, \dots, x_m) = (F_1, F_2, \dots, F_m)$,
então definimos:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial F_m}{\partial x_m}.$$

Ex.: $\vec{F}(x, y) = (x^2 y, x - y)$; então:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 y) + \frac{\partial}{\partial y} (x - y) = \underline{x^2 - 1}.$$

Usando a notação de operador ∇ a divergente de $\vec{F}$ pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}\text{div } \vec{F} &= \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} + \dots + \frac{\partial F_m}{\partial x_m} = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m} \right) \cdot (F_1, F_2, \dots, F_m) \\ &= \nabla \cdot \vec{F}\end{aligned}$$

↑
COMO SE FOSSE UM
PONTO
ESCALAR.

ROTACIONAL DE UM CAMPO VETORIAL DO $\mathbb{R}^3$

Def: Seja $\vec{F}: \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo vetorial.

Definimos o rotacional de $\vec{F}$, e denotamos por $\text{rot } \vec{F}$, a função; sendo $\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$, então:

$$\text{rot}(\vec{F}) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$

Esta fórmula é um tanto difícil de memorizar.
No entanto, existe uma forma simbólica para

ajuda a derivar esta fórmula: sendo

$$\vec{F} = (P, Q, R), \text{ então:}$$

$$\text{rot}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{vmatrix} R - \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} Q + \begin{vmatrix} \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} P$$

(índice $\frac{\partial R}{\partial y}$ na direção do vetor $\vec{i}$)

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}$$

Ex.: $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$; $\vec{F}(x, y, z) = (x^2y, 2x-3z, yz)$

$$\text{rot}(\vec{F}) = ?$$

solução:

$$\text{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2y & 2x-3z & yz \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y}(yz) - \frac{\partial}{\partial z}(2x-3z) \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial}{\partial z}(x^2y) - \frac{\partial}{\partial x}(yz) \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x}(2x-3z) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2y) \right) \vec{k}$$

$$+ \left(\frac{\partial}{\partial x} (2x - 3z) - \frac{\partial}{\partial y} (x^2 y) \right) \vec{k}$$

$$= (2 - (-3))\vec{i} + (0 - 0)\vec{j} + (2 - x^2)\vec{k}$$

$$= \underline{(2+3, 0, 2-x^2)}$$

Def. Um campo vetorial $\vec{F}: \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é dito irrotacional ou conservativo (ou gradiente) quando $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$.

(pensando num escoamento de fluido, se não há redemoinhos, então $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$).

Neste caso, tem-se:

$$\text{rot } \vec{F} = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} ; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} ; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

Obs.: Do mesmo modo que visto no conceito de divergente de um campo vetorial, o rotacional de um campo do $\mathbb{R}^3$ também possui uma notação em termos de operadores como segue:

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)}_{\nabla} \times \underbrace{(P, Q, R)}_{\vec{F}} =$$

"PRODUTO VETORIAL"

$$= \nabla \times \vec{F}$$

$$\Rightarrow \text{rot } \vec{F} = \nabla \times \vec{F}$$

obs.: Vale a seguinte propriedade envolvendo divergente e rotacional:

$$\text{div}(\text{rot } \vec{F}) = 0.$$

De fato, basta abrir as definições:

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} =$$

$$= \underbrace{\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right)}_{F_1} \vec{i} + \underbrace{\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right)}_{F_2} \vec{j} + \underbrace{\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)}_{F_3} \vec{k}$$

Então:

$$\underline{\text{div}(\text{rot } \vec{F})} = \frac{\partial}{\partial x} F_1 + \frac{\partial}{\partial y} F_2 + \frac{\partial}{\partial z} F_3$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

$$= \cancel{\frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y}} - \cancel{\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z}} + \cancel{\frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z}} - \cancel{\frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x}} + \cancel{\frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x}} - \cancel{\frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y}}$$

$$= 0$$

Usando a notação via operadores o cálculo fica mais direto:

$$\text{div}(\text{rot } \vec{F}) = \nabla \cdot (\underbrace{\nabla \times \vec{F}}_{\text{"produto misto"}}) = \underbrace{(\nabla \times \nabla)}_{\vec{0}} \cdot \vec{F} = 0$$

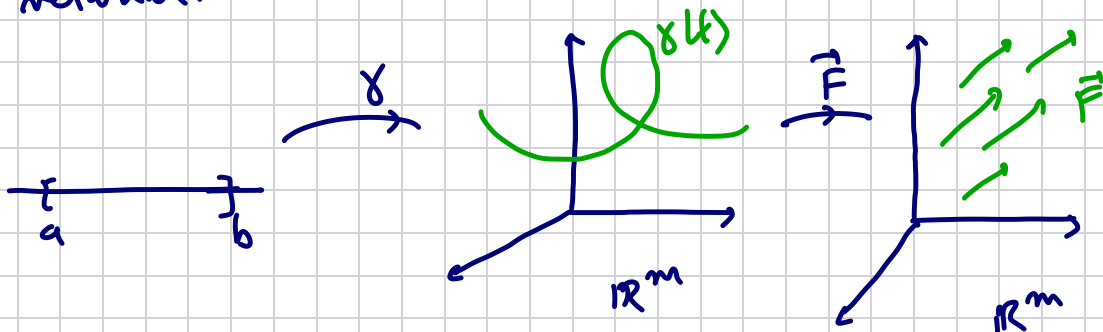
$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$$

obs: Do mesmo modo pode-se mostrar
que $\text{rot}(\text{div } \vec{F}) = \vec{0}$ (exercício)

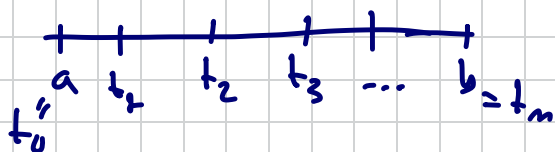
INTEGRAIS DE LINHA

Seja $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma curva suave
(ou seja γ é derivável com $\gamma'(t) \neq 0, \forall t \in [a, b]$).

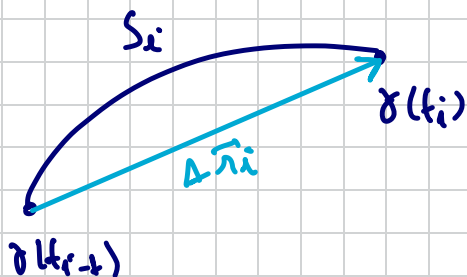
Seja $\vec{F}: \Omega = \gamma([a, b]) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ um campo
vetorial.



Seja $P = \{a = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_m = b\}$ uma partição do intervalo $[a, b]$, determinando subintervalos da forma $[t_{i-1}, t_i]$, de comprimentos $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$.



Considere S_i os arcos formados de $\gamma(t_{i-1})$ a $\gamma(t_i)$.



Tomar o vetor $\Delta \vec{r}_i = \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})$

Montamos a seguinte soma de Riemann:

$$\sum_{i=1}^m \vec{F}(\gamma(t_i)) \cdot \Delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^m \vec{F}(\gamma(t_i)) (\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}))$$

Como γ é suave (derivável com $\gamma'(t) \neq 0, \forall t$),
então, pelo T.V.M. (*) $\exists d_i \in [t_{i-1}, t_i]$ tal que

$$\begin{aligned}\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) &= \gamma'(d_i) \cdot (t_i - t_{i-1}) \\ &= \gamma'(d_i) \cdot \Delta t_i\end{aligned}$$

Assim:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}(\gamma(t_i)) \cdot \Delta \vec{\gamma}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}(\gamma(t_i)) \cdot \gamma'(d_i) \cdot \Delta t_i$$

Tomando o limite com $n \rightarrow \infty$, temos obter:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \vec{F}(\gamma(t_i)) \cdot \Delta \vec{\gamma}_i = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \cdot dt$$

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma}$$

INTEGRAL DE $\vec{F}$ AO
LONGO DA CURVA γ

PRODUTO ESCALAR

Outra vez obtemos:

(*) O T.V.M. foi recordado na aula 10.

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

INTEGRAL DE $\vec{F}$ AO LONGO DA CURVA γ .

Ex: Dado o campo $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, calcule a integral de linha de $\vec{F}$ ao longo da hélice $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ em $[0, 2\pi]$.

Solução:

$$\int_{\gamma} \vec{F} d\vec{\gamma} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt, \text{ onde:}$$

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t).$$

$$\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$$

$$\vec{F}(\gamma(t)) = (\cos t, \sin t, t)$$

$$\Rightarrow \gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$$

$$\Rightarrow \gamma(t) \cdot \gamma'(t) = (\cos t, \sin t, t) \cdot (-\sin t, \cos t, 1)$$

$$= \cos t \cdot (-\sin t) + \sin t \cdot \cos t + t \cdot 1$$

$$= -\cancel{\cos t \sin t} + \cancel{\cos t \sin t} + t = t$$

Desse forma, obtemos:

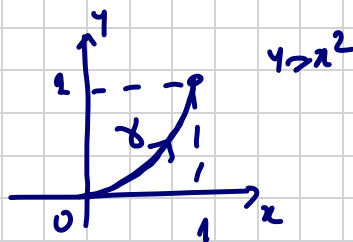
$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} = \int_0^{2\pi} \underbrace{\vec{F}(\gamma(t))}_{t} \cdot \gamma'(t) dt = \int_0^{2\pi} t dt =$$

$$= \frac{t^2}{2} \Big|_0^{2\pi} = \frac{4\pi^2}{2} - 0 = 2\pi^2 //$$

~~~~~

02) Calcule a integral de linha para  $\vec{F}(x, y) = (x^2y, x^2 + y^2)$ , ao longo da parábola  $y = x^2$  no intervalo  $[0, 1]$ .

Solução:



parametrização para a

parábola:

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \gamma(t) = (x, y)$$

$$\gamma(t) = (t, t^2)$$

$$\vec{F}(x, y) = (x^2y, x^2 + y^2)$$

$$\Rightarrow \vec{F}(\gamma(t)) = \vec{F}(t, t^2) = (t^2 \cdot t^2, t^2 + (t^2)^2)$$

$$\Rightarrow \vec{F}(\gamma(t)) = (t^4, t^2 + t^4)$$

$$\gamma(t) = (t, t^2) \Rightarrow \gamma'(t) = (1, 2t)$$

Dito, obtenemos:

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} = \int_0^1 \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt =$$

$$= \int_0^1 (t^4, t^2 + t^4) \cdot (1, 2t) dt$$

↑  
prop. ESCALAR

$$= \int_0^1 (t^4 \cdot 1 + (t^2 + t^4) \cdot 2t) dt =$$

$$= \int_0^1 (t^4 + 2t^3 + 2t^5) dt =$$

$$= \left( \frac{t^5}{5} + \frac{2t^4}{4} + \frac{2t^6}{6} \right) \Big|_0^1 = \left( \frac{1^5}{5} + \frac{1^4}{2} + \frac{1^6}{3} \right) \Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 0 = \frac{6 + 15 + 10}{30} = \frac{31}{30}$$

