

Fundação Universidade Federal de Pelotas

Disciplina de Cálculo 3

Prof. Dr. Maurício Zahn

Lista 12 de Exercícios - Integrais de Linha. Teoremas de Green, da divergência e de Stokes

1. Calcule a integral de linha de cada campo vetorial $\vec{F}$ dado, ao longo da curva orientada indicada em cada item:

(a) $\vec{F}(x, y) = (x^2, xy)$, ao longo do segmento de reta de $(0, 0)$ a $(2, 2)$.

(b) $\vec{F}(x, y) = (4, y)$, no quarto de círculo $x^2 + y^2 = 1$ com $x, y \leq 0$, e orientação anti-horária.

(c) $\vec{F}(\frac{1}{y^3+1}, \frac{1}{z+1}, 1)$, $\gamma(t) = (t^3, 2t, t^2)$, com $0 \leq t \leq 1$.

2. Calcule $\int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r}$, sendo $\vec{F}(x, y) = 9x^2y\vec{i} + (5x^2 - y)\vec{j}$, onde γ é a curva $y = x^3 + 1$, de $(1, 2)$ a $(3, 28)$.

3. Mostre que a integral $\int_{\gamma} (\ln x + 2y)dx + (e^y + 2x)dy$ é independente do caminho. Depois, calcule esta integral sendo γ uma curva do ponto $A(3, 1)$ ao ponto $B(1, 3)$.

4. Mostre que a integral $\int_{\gamma} (\sin y \sinh x + \cos y \cosh x)dx + (\cos y \cosh x - \sin y \sinh x)dy$ é independente do caminho. Em seguida, calcule esta integral do ponto $A(1, 0)$ ao ponto $B(2, \pi)$.

5. Calcule $\int_C \vec{F} d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x, y, z) = (e^x + e^{z^2})\vec{i} + (e^y + z)\vec{j} + (2xze^{z^2} + y)\vec{k}$, ao longo de qualquer caminho do ponto $A(1, 1, 0)$ ao ponto $B(1, 2, -1)$. Por quê por qualquer caminho serve?

6. Determine as seguintes integrais ao longo dos caminhos fechados:

(a) $\oint_{\gamma} (2xy + 4)dx + (x^2 + z^2)dy + 2zydz$, onde $\gamma(t) = (\sin t, \cos t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

(b) $\oint_{\gamma} (xy + z)dx + (x - y)dy + 4zdz$, onde $\gamma(t) = (\sin t, \cos t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

7. Calcule a integral de linha em cada item a seguir de duas formas: (i) diretamente, através de parametrizações; (ii) usando o teorema de Green.

(a) $\oint_{\gamma} xy^2dx + x^3dy$, onde γ é o retângulo com vértices em $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 3)$ e $(0, 3)$.

(b) $\oint_{\gamma} ydx - xdy$, onde γ é a circunferência unitária com centro na origem.

8. Use o teorema de Green para calcular cada integral de linha a seguir, ao longo da curva dada com orientação positiva.

(a) $\int_{\gamma} e^y dx + 2xe^y dy$, onde γ é o quadrado de lados $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ e $y = 1$.

(b) $\int_{\gamma} (ye^{\sqrt{x}})dx + (2x + \cos y^2)dy$, onde γ é a fronteira da região delimitada pelas parábolas $y = x^2$ e $x = y^2$

(c) $\int_{\gamma} xe^{-2x}dx + (x^4 + 2x^2y^2)dy$, onde γ é a região entre as circunferências $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$.

(d) $\int_{\gamma} \frac{x^2y}{x^2 + 1}dx - \arctan x dy$, onde γ é a elipse $4x^2 + 25y^2 = 100$.

(e) $\int_{\gamma} (6y + x)dx + (y + 2x)dy$, onde γ é a circunferência $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$.

9. Utilize o Teorema de Green para calcular $\oint_{\gamma} \cos(x - 3y)dx + \ln(x + y)dy$, onde γ é o quadrilátero $ABCD$ de vértices $A(\frac{7}{4}, \frac{1}{4})$, $B(\frac{9}{4}, -\frac{1}{4})$, $C(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ e $D(1, 0)$.
10. Use o Teorema de Green para calcular $\oint_{\gamma} e^{x+y}dx + e^{x+y}dy$, onde γ é a circunferência $x^2 + y^2 = 4$.
11. Em cada item, verifique o Teorema da divergência no plano e o Teorema de Stokes no plano para $\vec{F}$ e Ω dados.
- (a) $\vec{F}(x, y) = 3x\vec{i} + 2y\vec{j}$, e Ω é a região limitada pela circunferência $x^2 + y^2 = 1$.
- (b) $\vec{F}(x, y) = (x^2, y^2)$, e Ω a região limitada pela elipse $4x^2 + 25y^2 = 100$.
12. Sejam u e v funções escalares possuindo derivadas parciais primeiras contínuas no domínio aberto e conexo Ω do plano xy . Seja γ uma curva suave fechada simples em Ω . Mostre que

$$\oint_{\gamma} uv dx + uv dy = \iint_{\Omega} \left[v \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + u \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] dA.$$

13. Use o Teorema da Divergência para mostrar que, dado um campo escalar $g : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ com derivadas parciais contínuas até a segunda ordem no aberto Ω e γ uma curva suave fechada simples em Ω , então

$$\oint_{\gamma} g \frac{\partial g}{\partial \vec{n}} ds = \iint_{\Omega} (g\Delta g + \|\nabla g\|^2) dA.$$

Obs.: a quantidade $\nabla g \cdot \vec{n} := \frac{\partial g}{\partial \vec{n}}$ aparece na integral de linha. A derivada direcional de g na direção do vetor normal $\vec{n}$ é chamada de *derivada normal* de g .

14. Use o Teorema de Green na forma vetorial para provar a *primeira identidade de Green*:

$$\iint_{\Omega} f \Delta g dA = \oint_{\gamma} f(\nabla g) \cdot \vec{n} ds - \iint_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g dA,$$

onde Ω e γ satisfazem as hipóteses do Teorema de Green e as derivadas parciais apropriadas de f e g existem e são contínuas.

15. Use a primeira identidade de Green do exercício anterior para provar a *segunda identidade de Green*:

$$\iint_{\Omega} (f \Delta g - g \Delta f) dA = \oint_{\gamma} (f \nabla g - g \nabla f) \cdot \vec{n} ds$$

onde Ω e γ satisfazem as hipóteses do Teorema de Green e as derivadas parciais apropriadas de f e g existem e são contínuas.