

**Fundação Universidade Federal de Pelotas**  
**Curso de Licenciatura em Matemática**  
**Disciplina de Cálculo 3**  
**Prof. Dr. Maurício Zahn**  
**Lista 11 de Exercícios - Campos vetoriais**

1. Mostre que os seguintes campos vetoriais são conservativos (ou seja, campos gradientes). Em seguida, calcule a função potencial de  $\vec{F}$ .

(a)  $\vec{F}(x, y, z) = (4x + 5yz)\vec{i} + (5xz)\vec{j} + 5xy\vec{k}$

(b)  $\vec{F}(x, y, z) = (yz + 2, xz + 1, xy + 2z)$

(c)  $\vec{F}(x, y, z) = (ze^x + e^y)\vec{i} + (xe^y - e^z)\vec{j} + (-ye^z + e^x)\vec{k}$

2. Sejam  $\vec{F}(x, y, z) = (f_1, f_2, f_3)$  e  $\vec{G}(x, y, z) = (g_1, g_2, g_3)$  funções vetoriais em um domínio  $\Omega$  com derivadas parciais de primeira ordem contínuas em  $\Omega$ . Mostre que:

(a)  $\text{rot}(\vec{F} + \vec{G}) = \text{rot}(\vec{F}) + \text{rot}(\vec{G})$ .

(b)  $\text{rot}(h\vec{F}) = h \text{rot}(\vec{F}) + \nabla h \times \vec{F}$ , onde  $h = h(x, y, z)$  é uma função escalar diferenciável em  $\Omega$ .

3. Calcule  $\text{div}\vec{F}$  para o campo vetorial:

(a)  $\vec{F}(x, y) = \sin^2 x \vec{i} + 2 \cos x \vec{j}$

(b)  $\vec{F}(x, y, z) = \ln xy \vec{i} + x \vec{j} + z \vec{k}$ .

4. Encontre a divergência e o rotacional do campo vetorial dado:

(a)  $\vec{F}(x, y, z) = (e^x \cos y, e^x \sin y, z)$

(b)  $\vec{F}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$

5. Sendo  $\vec{u} = 2xz\vec{i} + (x^2 - z^2)\vec{j} + (x^2 + 2z)\vec{k}$ , calcule  $\text{rot}(\text{rot } \vec{u})$ .

6. Se  $f$  for um campo escalar e  $\vec{F}$  e  $\vec{G}$  forem campos vetoriais, então  $f\vec{F}$ ,  $\vec{F} \cdot \vec{G}$  e  $\vec{F} \times \vec{G}$  são definidos por

$$(f\vec{F})(x, y, z) = f(x, y, z)\vec{F}(x, y, z)$$

$$(\vec{F} \cdot \vec{G})(x, y, z) = \vec{F}(x, y, z) \cdot \vec{G}(x, y, z)$$

$$(\vec{F} \times \vec{G})(x, y, z) = \vec{F}(x, y, z) \times \vec{G}(x, y, z)$$

Prove cada identidade a seguir, admitindo que as derivadas parciais apropriadas existam e sejam contínuas.

(a)  $\text{div}(\vec{F} + \vec{G}) = \text{div } \vec{F} + \text{div } \vec{G}$

(b)  $\text{rot}(\vec{F} + \vec{G}) = \text{rot } \vec{F} + \text{rot } \vec{G}$

(c)  $\text{div } f\vec{F} = f \text{div } \vec{F} + \vec{F} \cdot \nabla f$

(d)  $\text{rot}(f\vec{F}) = f \text{rot } \vec{F} + (\nabla f) \times \vec{F}$

(e)  $\text{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot \text{rot } \vec{F} - \vec{F} \cdot \text{rot } \vec{G}$