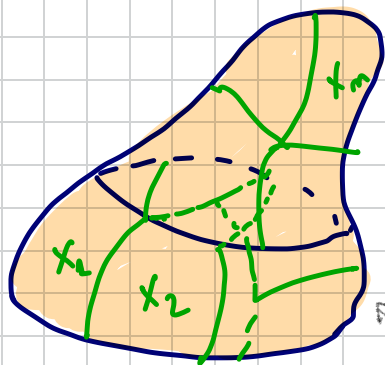


INTEGRAIS TRIPLAS:

Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida em um conjunto J -mensurável de $\mathbb{R}^3$ (função escalar). Seja $D = \{X_1, X_2, \dots, X_m\}$ uma decomposição do conjunto Ω , ou seja:

$$\Omega = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_m \quad e$$

$$\text{int.}(X_i) \cap \text{int.}(X_j) = \emptyset, \text{ se } i \neq j.$$

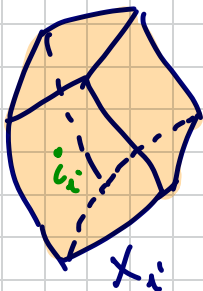


$\Omega \subset \mathbb{R}^3$



PENSE EM UMA "BATATA" CORTADA EM
M PEÇAS. CADA UM DELES É UM CONJ X_i .

Escolha um ponto c_i qualquer em X_i ;



Monte-se assim uma
soma pontilhada, dada por:

$$\Sigma(f; D) = \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \text{Vol}(X_i),$$

formando assim uma soma de Riemann.

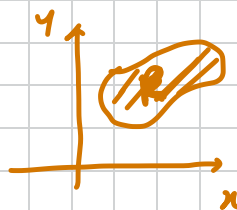
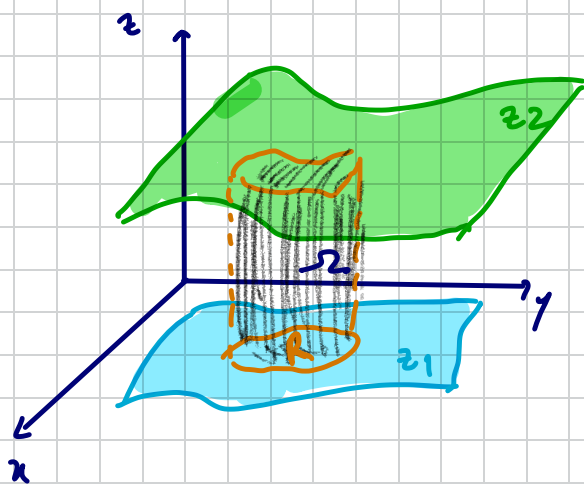
A integral de f em Ω é definida como
o limite dessa soma, com $n \rightarrow \infty$; ou seja:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f &= \lim_{n \rightarrow \infty} \Sigma(f; D) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \text{Vol}(X_i) \end{aligned}$$

ou seja:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \text{Vol}(X_i)$$

Na prática uma integral tripla costuma ser decomposta por uma integral dupla combinada com uma integral simples, pois geralmente a região Ω fica compreendida entre duas superfícies z_1 e z_2 . Por exemplo:



$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_R dx dy \int_{z=z_1}^{z=z_2} f(x, y, z) dz$$

RESULTA EM
UMA FUNÇÃO DE
 x E y .

VOLUME DE UM SÓLIDO USANDO INTEGRAIS TRÍPLAS:

O volume V de um sólido S dado por uma região $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é dado por:

$$V = \iiint_{\Omega} dx dy dz = \iiint_{\Omega} dV$$

De fato; seja $A \subset \mathbb{R}^3$ um paralelepípedo tal que $\Omega \subset A$. Assim:

$$V = \iiint_A \underbrace{\xi(x, y, z)}_{=1} dx dy dz =$$

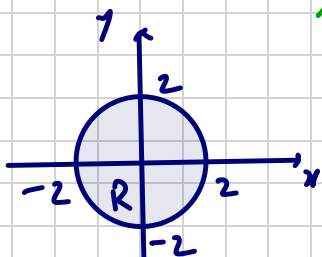
$$= \underbrace{\iiint_{\Omega} \xi(x, y, z) dx dy dz}_1 + \underbrace{\iiint_{A \setminus \Omega} \xi(x, y, z) dx dy dz}_0$$

$$= \underbrace{\iiint_{\Omega} 1 \cdot dx dy dz}_V = \underbrace{\iiint_{\Omega} dV}_V$$

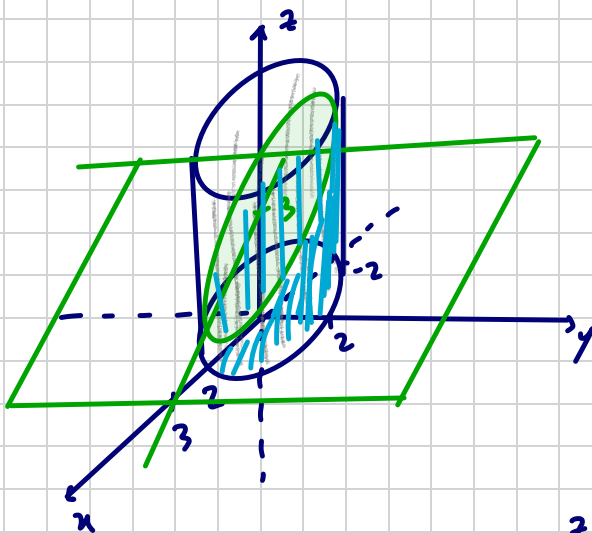
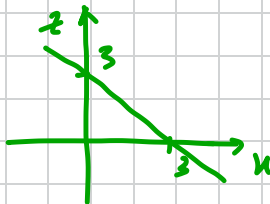
No que segue, vejamos alguns exemplos:

01) Calcule o volume V do sólido obtido pela região cortada do cilindro $x^2 + y^2 = 4$ pelos planos $z = 0$ e $x + z = 3$.

Solução:



$$z = 3 - x$$



$$V = \iiint_R dV = \iint_R \int_{z=0}^{z=3-x} dz =$$



COORD. POLARES

FUNÇÃO DE x E DE y .

$$= \iint_R dz dy \quad z \Big|_{z=0}^{z=3-x} = \iint_R (3-x) dx dy =$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^2 (3 - \rho \cos \theta) \cdot \rho d\rho d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\int_{\rho=0}^2 (3\rho - \rho^2 \cos \theta) d\rho \right) d\theta =$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\frac{3\rho^2}{2} - \frac{\rho^3}{3} \cos \theta \right) \Big|_{\rho=0}^{\rho=2} d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(6 - \frac{8}{3} \cos \theta - 0 \right) d\theta =$$

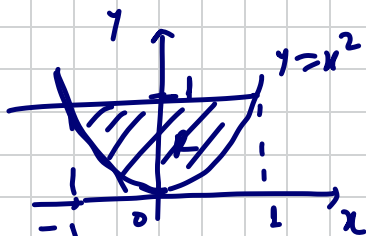
$$= \left(6\theta - \frac{8}{3} \sin \theta \right) \Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = 6 \cdot 2\pi - \frac{8}{3} \cdot \cos 2\pi - \left(0 - \frac{8}{3} \cos 0 \right)$$

$$= 12\pi - \cancel{\frac{8}{3}}(1) + \cancel{\frac{8}{3}}(1) = 12\pi \text{ u.v.}$$

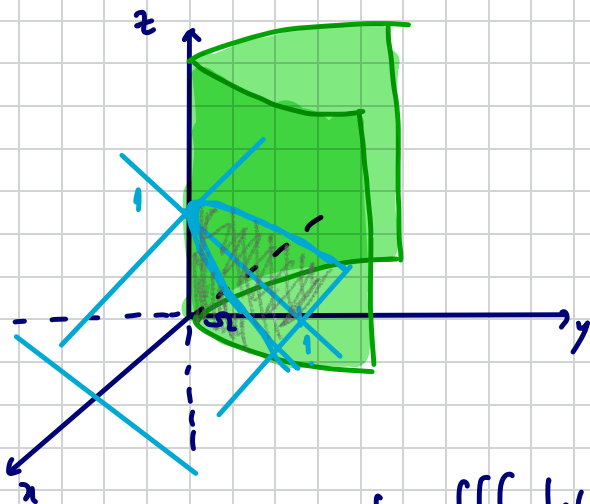
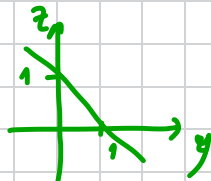
(UNITS OF VOLUME)

02) Use integral tripla para determinar o volume do sólido limitado pelo cilindro $y = x^2$ e pelos planos $z = 0$ e $y + z = 1$. (Resp.: $\frac{8}{15}$ u.m.)

solução:



$$z = 1 - y$$



$$V = \iiint_R dV = \iint_R dx dy \int_{z=0}^{z=1-y} dz$$

(...)

↳ terminamos na sexta.