CÁLCULO 3, TURMA T3

17/06/26 – AULA 32

Na aula passada estudamos integrais em coordenadas polares. Vimos que se Ω for uma região definida por arcos de circunferência, então

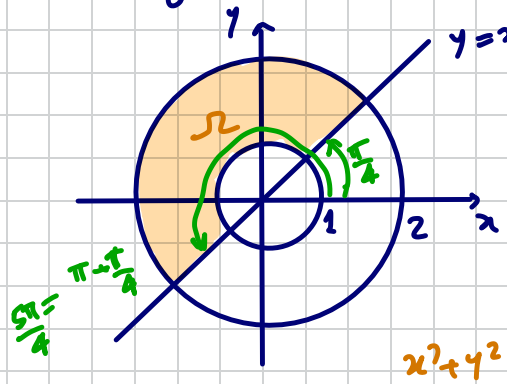
$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,dA = \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta}\int_{\rho=a}^{\rho=b} f(\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta)\,\rho\,d\rho\,d\theta$$

Vimos dois exemplos. Vejamos outros:

03) Calcule $\iint_{\Omega} \frac{y\,dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, onde Ω é a região dada por:

$$\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1 \le x^2+y^2 \le 4 \text{ e } y \ge x\}.$$

Solução: A região Ω é dada por:



$1 \le \rho \le 2$

$\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{5\pi}{4}$.

$x^2+y^2=\rho^2$; $dx\,dy \to \rho\,d\rho\,d\theta$.

Assim, teremos:

$$\iint_{\Omega} \frac{y\,dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \int_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\theta=\frac{5\pi}{4}} \int_{\rho=1}^{\rho=2} \frac{\rho \operatorname{sen}\theta \cdot \rho\, d\rho\, d\theta}{\sqrt{\rho^2}} =$$

$$= \int_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\theta=\frac{5\pi}{4}} \int_{\rho=1}^{\rho=2} \frac{\rho^2 \operatorname{sen}\theta \cdot d\rho\, d\theta}{\rho} = \int_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\theta=\frac{5\pi}{4}} \int_{\rho=1}^{\rho=2} \rho \operatorname{sen}\theta \; d\rho\, d\theta =$$

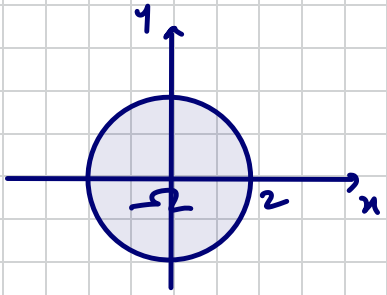
$$= \int_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\theta=\frac{5\pi}{4}} \operatorname{sen}\theta\, d\theta \cdot \int_{\rho=1}^{\rho=2} \rho\, d\rho = -\cos\theta \Big|_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\theta=\frac{5\pi}{4}} \cdot \left(\frac{\rho^2}{2}\right)\Big|_{\rho=1}^{\rho=2} =$$

$$= -\left(\cos\frac{5\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4}\right)\cdot\left(2 - \frac{1}{2}\right) = -\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\frac{3}{2} =$$

$$= +\sqrt{2}\cdot\frac{3}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \;//$$

04) $\iint_{\mathcal{R}} \cos\sqrt{x^2+y^2}\, dA$, onde $\mathcal{R}$ é o disco com centro na origem e raio 2.

Solução!



$0 \le \rho \le 2$

$0 \le \theta \le 2\pi$

$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$

$dx\,dy = \rho\, d\rho\, d\theta$.

$$\Rightarrow \iint_{\mathcal{R}} \cos\underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{\rho}\, dA = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\int_{\rho=0}^{\rho=2} \cos\rho \cdot \rho\, d\rho\, d\theta = \ldots$$

↳ REQUER UMA INTEGRAÇÃO POR PARTES.

$$\int \rho \cdot \cos\rho\, d\rho = \int u\, dv = u\cdot v - \int v\, du$$

$$\begin{cases} u = \rho \Rightarrow du = d\rho \\ dv = \cos\rho\, d\rho \Rightarrow v = \operatorname{sen}\rho. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int \rho\cos\rho\, d\rho = \rho\cdot\operatorname{sen}\rho - \int \operatorname{sen}\rho\, d\rho = \rho\cdot\operatorname{sen}\rho - (-\cos\rho) + c$$

$$= \rho\operatorname{sen}\rho + \cos\rho + c.$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left(\rho \operatorname{sen}\rho + \cos\rho \right)\Big|_{\rho=0}^{\rho=2} \cdot d\theta = \left(\rho \operatorname{sen}\rho + \cos\rho \right)\Big|_{\rho=0}^{\rho=2} \cdot \theta \Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi}$$

CONSTANTE PARA θ

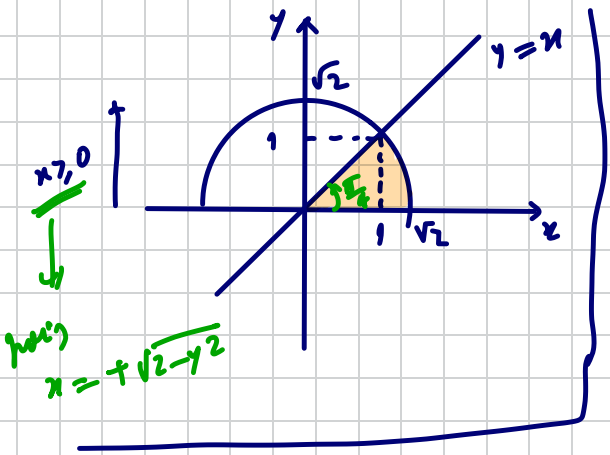
$$= \left[2 \cdot \operatorname{sen} 2 + \cos 2 - (0 \cdot \operatorname{sen} 0 + \cos 0) \right] \cdot (2\pi - 0) =$$

$$2\pi \cdot (2 \operatorname{sen} 2 + \cos 2 - 1)$$

05) Calcule $\int_0^1 \int_y^{\sqrt{2-y^2}} (x+y)\, dx\, dy$.

<u>solução:</u> Este caso até é possível calcular a integral diretamente, mas dará um pouco de trabalho. Como um limites de integração é $x = \sqrt{2-y^2}$; ou seja, quando $x^2+y^2 = 2$; $x \geq 0$, temos que R possui uma parte circular, indicando a possibilidade de usar coordenadas polares. Assim:

$$\int_{y=0}^{y=1}\int_{x=y}^{x=\sqrt{2-y^2}}(x+y)\,dx\,dy = \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}}\int_{\rho=0}^{\rho=\sqrt{2}}(\rho\cos\theta+\rho\operatorname{sen}\theta)\,\rho\,d\rho\,d\theta =$$



$$= \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}}\int_{\rho=0}^{\rho=\sqrt{2}}\rho^2\cdot(\cos\theta+\operatorname{sen}\theta)\,d\rho\,d\theta =$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}}(\cos\theta+\operatorname{sen}\theta)\,d\theta \cdot \int_{\rho=0}^{\rho=\sqrt{2}}\rho^2\,d\rho =$$

$$= (\operatorname{sen}\theta-\cos\theta)\Big|_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}} \cdot \left(\frac{\rho^3}{3}\right)\Big|_{\rho=0}^{\rho=\sqrt{2}} =$$

$$= \left[\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}-(\operatorname{sen}0-\cos0)\right]\cdot\left(\frac{(\sqrt{2})^3}{3}-0\right) =$$

$$= \left[\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}-(0-1)\right]\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\,.$$

MUDANÇA GERAL DE COORDENADAS NO $\mathbb{R}^2$:

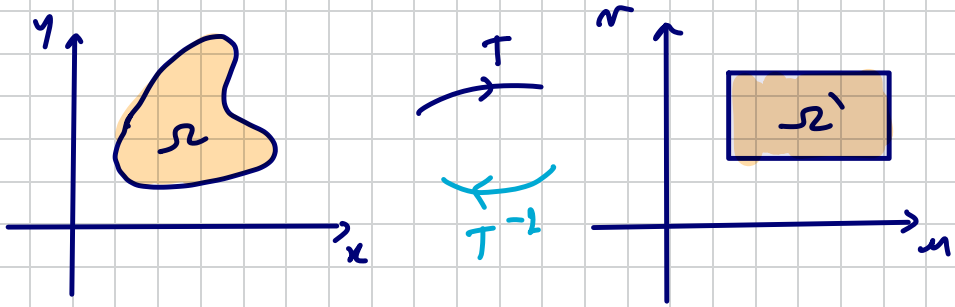
Queremos calcular $\iint_{\Omega} f(x,y)\,dA$, com Ω um conjunto J-mensurável, mas às vezes ou a região Ω é difícil ou até mesmo impossível de se trabalhar com as variáveis x e y; mas, trocando adequadamente de variável, o problema pode se tornar simples. É o que faremos aqui.

Sejam $f:\Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função integrável em Ω, e considere

$$T:\Omega \subset \mathbb{R}^2 \to T(\Omega) := \Omega' \subset \mathbb{R}^2$$

uma transformação injetiva e de classe C^1 (uma função é de classe C^1 quando as derivadas parciais existirem e forem contínuas).

Essa transformação manda a região Ω do plano xy para uma região Ω' do plano uv.



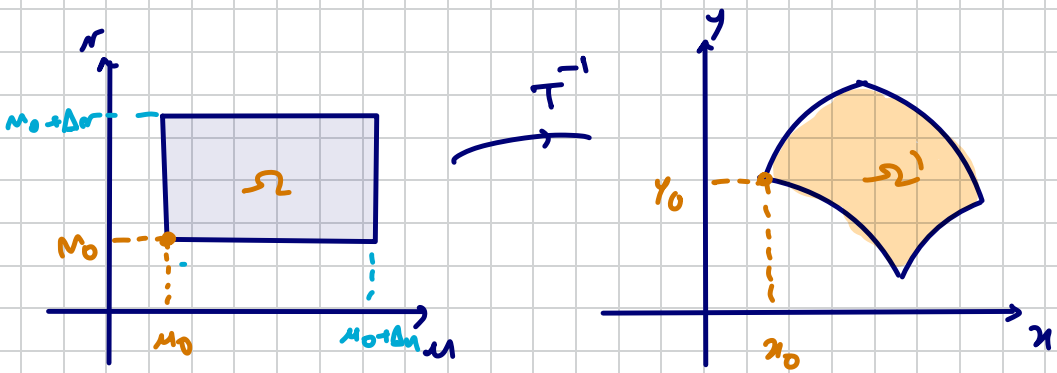
Note que $T: \Omega \to \Omega' = T(\Omega)$ é bijetiva.

Logo, existe a transformação inversa $T^{-1}: \Omega' \to \Omega$

A transformação $T: \Omega \to \Omega'$ é tal que

$$T(x,y) = (u,v), \text{ onde}$$

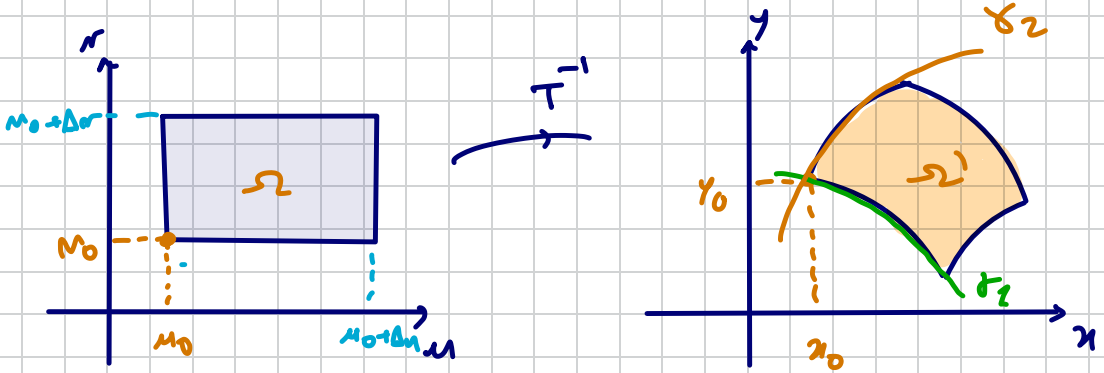
$$\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$$



Seja Ω um retângulo no plano uv, de dimensões Δu e Δv; e considere (u_0, v_0) o

vértice do canto inferior esquerdo, c.f. esquema acima. Então, $T^{-1}(u_0, v_0) = (x_0, y_0)$.

Defina as curvas γ_1 e γ_2 como no esquema:



$$\gamma_1 : [u_0, u_0 + \Delta u] \to \mathbb{R}^2 ;$$

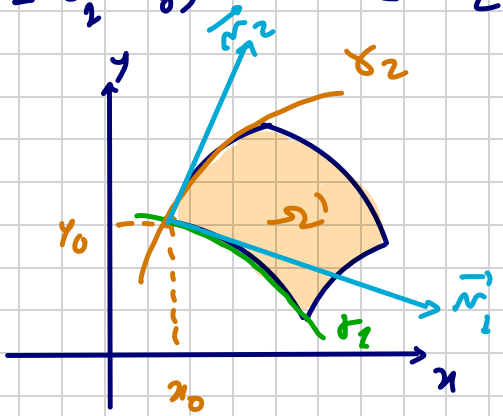
$$\gamma_1(u) = (x(u, v_0); y(u, v_0))$$

$$\gamma_2 : [v_0, v_0 + \Delta v] \to \mathbb{R}^2$$

$$\gamma_2(v) = (x(u_0, v); y(u_0, v))$$

Sejam $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ os vetores tangentes a γ_1 e γ_2, respectivamente, no ponto (x_0, y_0):

$\vec{v}_1 = \gamma_2'(u_0)$ e $\vec{v}_2 = \gamma_2'(v_0)$



Ou seja:

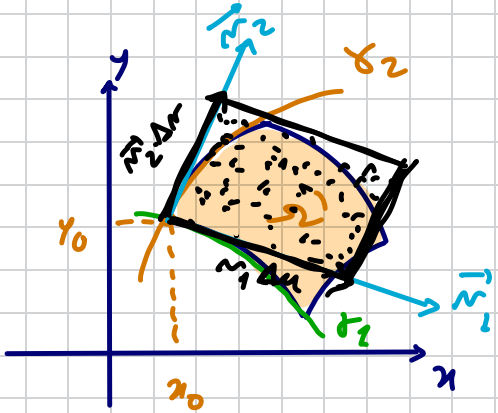
$$\vec{v}_1 = \gamma_1'(u_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) \right)$$

$$\vec{v}_2 = \gamma_2'(v_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) \right)$$

Redimensionando os vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, temos:

$$\vec{v}_1 . \Delta u \quad \text{e} \quad \vec{v}_2 . \Delta v .$$

A área de $\mathcal{R}'$ será, dessa forma, aproximadamente a área do paralelogramo de lados dados por $\vec{v}_1 . \Delta u$ e $\vec{v}_2 . \Delta v$:



A área A desse paralelogramo é dada por:

$$A = \| \vec{n}_1 \cdot \Delta u \times \vec{n}_2 \Delta v \| = \| \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \| \cdot \Delta u \cdot \Delta v .$$

$\Delta u, \Delta v > 0$

e como

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{matrix}$$

$$= (0-0)\vec{i} + (0-0)\vec{j} + \left(\frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \right) \vec{k} .$$

$$= \left(\frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \right) \vec{k} .$$

Assim:

$$\|\vec{n}_1 \times \vec{n}_2\| = \left\| \left(\frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \right) \vec{k} \right\| =$$

$$= \left| \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \right| \cdot \underbrace{\|\vec{k}\|}_{=1}$$

$$= \left| \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \right| =$$

$$= \left| \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \right| = |\det J(T)(u,v)|$$

Lembre que $T(x,y) = (u,v)$

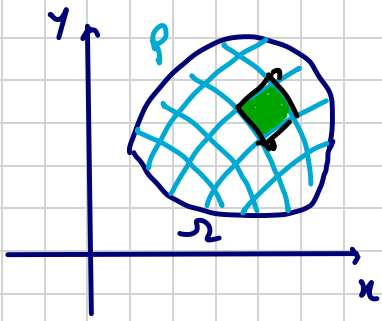
$$d_{(u,v)} T = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} := J(T)(u,v).$$

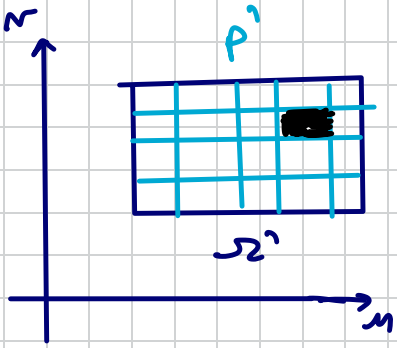
Ou seja, obtemos que a área do paralelogramo destacado é dada por

$$A = \|\vec{n}_1 \times \vec{n}_2\| \cdot \Delta u \cdot \Delta v = \det J(T)(u,v) \cdot \Delta u \cdot \Delta v$$

Sejam $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ integrável; e P uma partição de Ω.

Sendo $T: \Omega \to T(\Omega)$ transformação injetiva e de classe C^1, T transforma Ω em Ω'; e com isso, transforma a partição P de Ω na partição P' em Ω'.





Montamos a soma de Riemann:

$$\sum_{i,j} f(x_i, y_j) \cdot \underbrace{\text{Vol}(B)}_{\text{ÁREA}} =$$

$$= \sum_{i,j}^{m,n} f(x_i(u,v), y_i(u,v)) \cdot |\det J(T)(u_i, v_j)| \, \Delta u_i \Delta v_i$$

Então, passando o limite com $m, n \to \infty$, vemos obter:

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,dA = \iint_{\Omega'} f(x(u,v), y(u,v)) \cdot |\det J(T)(u,v)| \cdot du\,dv$$

FÓRMULA DE MUDANÇA DE COORDENADAS DO PLANO xy PARA O PLANO uv.

Ex.:

01) O sistema de coordenadas polares é uma mudança de coordenadas do sistema retangular para o polar. De fato; seja

$T: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \Omega' \subset \mathbb{R}^2$ dada por:

$$T: \begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \end{cases}.$$

Então; $J(T)(\rho,\theta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\rho\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \rho\cos\theta \end{bmatrix}$$

Logo:

$$\det J(T)(\rho,\theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} =$$

$$= \rho\cos^2\theta + \rho\operatorname{sen}^2\theta = \rho(\underbrace{\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta}_{=1}) = \rho$$

Assim:

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,dA = \iint_{\Omega'} f(x(\rho,\theta), y(\rho,\theta)) \cdot |\det J(T)(\rho,\theta)|\,d\rho\,d\theta$$

$$= \iint_{\Omega'} f(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta) \cdot \underbrace{|\rho|}_{\rho>0} \cdot d\rho\,d\theta =$$

$$= \iint_{\Omega'} f(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta) \cdot \rho\,d\rho\,d\theta.$$

Neste caso, $\Omega' = \Omega$.