

INTEGRAIS DUPLAS EM COORDENADAS POLARES:

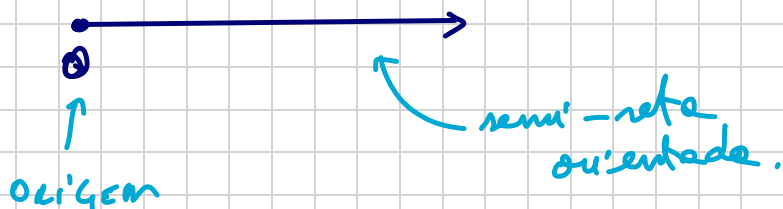
Uma técnica usada para resolver certas integrais duplas consiste em uma substituição adequada de variáveis. Quando a região $\mathcal{R}$ a ser integrada é composta por círculos ou arcos de circunferências, usamos o sistema de coordenadas polares, que apresentaremos a seguir.

SISTEMA DE COORDENADAS POLARES:

O sistema de coordenadas polares é formado por pontos no plano, definidos por pares ordenados da forma (ρ, θ) , onde $\rho \in \mathbb{R}$ é um RAIO, chamado de RAIO VETOR e θ , $0 \leq \theta \leq 360^\circ$ é um ângulo.

O sistema polar é construído a partir de uma semi-reta horizontal, com a orientação positiva (semi-eixo OX , positiva), onde a

origem O do sistema é o ponto inicial do semi-eixo.

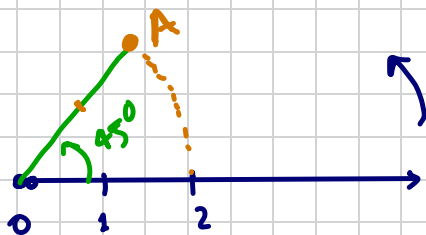


Para marcar um ponto (ρ, θ) no sistema polar, marcamos ρ sobre o raio real, e, em seguida, com um compasso, marcamos o ângulo θ , como na trigonometria.

Ex.: 01) $A(2, 45^\circ)$

$$\rho = 2$$

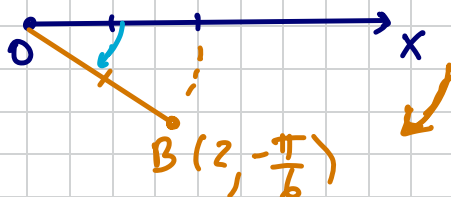
$$\theta = 45^\circ$$



02) $B \left(2, -\frac{\pi}{6} \right)$.

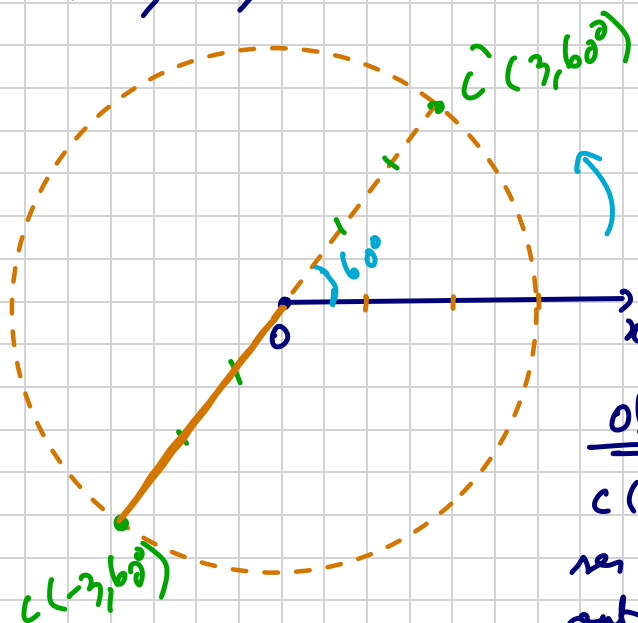
$\rho = 2$

$\theta = -\frac{\pi}{6} = -30^\circ$



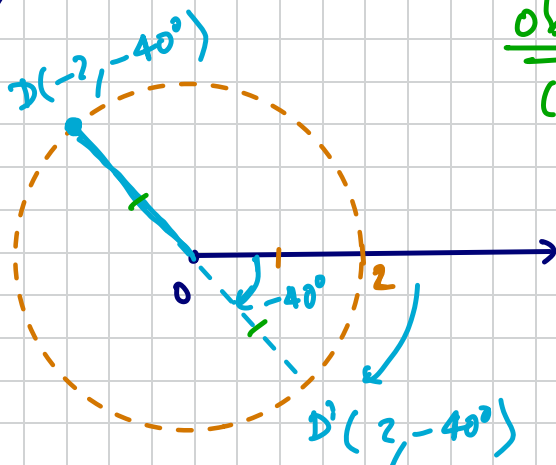
Quando $\rho < 0$, marcamos usando o prolongamento do eixo retos. Por exemplo:

$C(-3, 60^\circ)$



Obs.: Note que $C(-3, 60^\circ)$ pode ser representado de outras formas, como por exemplo, $(3, 210^\circ)$ (SIMETRIA)

$$D(-2, -40^\circ)$$

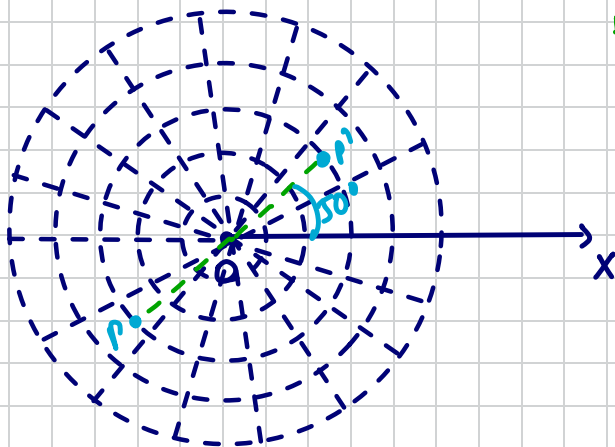


Obs:

$$(-2, 40^\circ) \approx (2, 140^\circ)$$

↑
por
simetria

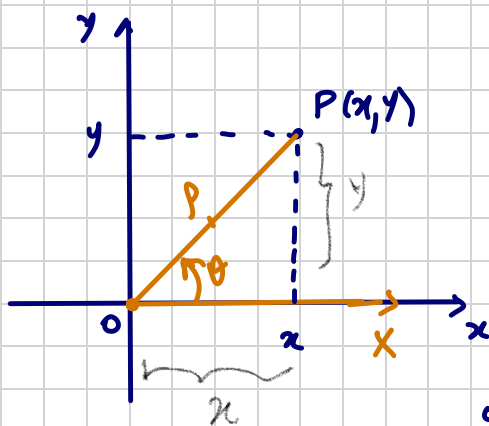
Oficialmente, um sistema polar é formado por um eixo (eixo real) e um conjunto de circunferências concêntricas à origem O :



$$P(3, -50^\circ)$$

CONVERSÃO SISTEMA POLAR $\longleftrightarrow$ RETANGULAR

Considere os sistemas cartesianos (x, y) e polar (ρ, θ) , com suas origens coincidindo e o eixo real OX de ambos também. Dado um ponto $P(x, y)$ no sistema retangular, temos as seguintes relações de conversão para o sistema polar:



$$\sin \theta = \frac{y}{\rho}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \rho \cdot \sin \theta}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{\rho}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \rho \cos \theta}$$

Além disso, pelo T. de Pitágoras, segue que:

$$\rho^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow \boxed{\rho = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \boxed{\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)}$$

Ex: $A(2, 60^\circ)$ no sistema polar, passando,
no sistema retangular, as coordenadas:

$$A(x, y); \text{ onde: } x = \rho \cos \theta$$

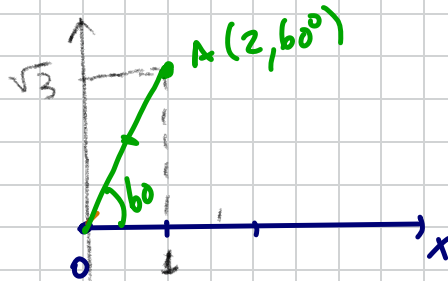
$$\underline{x} = 2 \cdot \cos 60^\circ = 2 \cdot \underline{\frac{1}{2}} = \underline{1}$$

$$y = \rho \cdot \sin \theta.$$

$$\underline{y} = 2 \cdot \sin 60^\circ = 2 \cdot \underline{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \underline{\sqrt{3}}$$

Assim:

$$A(2, 60^\circ) \leftrightarrow A(1, \sqrt{3}).$$

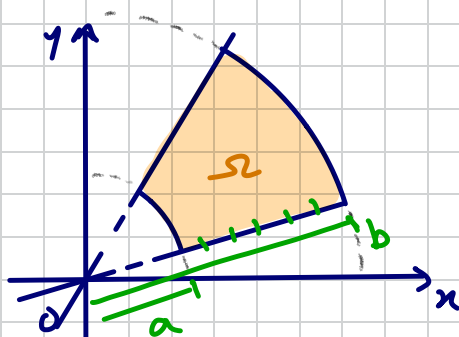


$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta. \end{cases}$$

INTEGRAIS EM COORDENADAS POLARES:

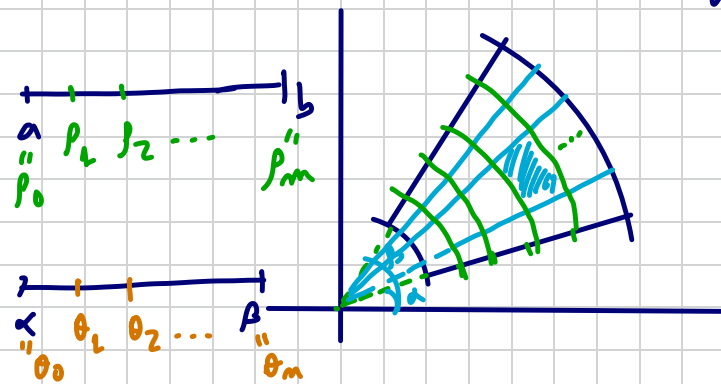
Queremos calcular $\iint_{\Omega} f(x,y) dA$, onde Ω é

uma região delimitada por arcos de circunferências.



Seja $P = P_1 \times P_2$ uma partição de Ω , reticul, ou seja;

- P_1 divide o intervalo $[a,b]$ em n subintervalos da forma $[p_{i-1}, p_i]$
- P_2 divide o arco $[\alpha, \beta]$ em n subintervalos da forma $[\theta_{i-1}, \theta_i]$



R_{ij}

Essa partição
determina sub-
regiões R_{ij} da
forma: $[p_{i-1}, p_i] \times [\theta_{j-1}, \theta_j]$.

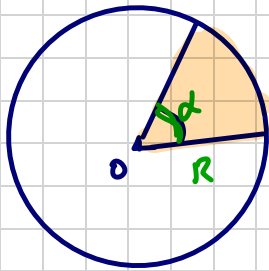


Tomamos c^* o ponto médio de cada subregião:

$$c^* = (\rho_i^*, \theta_j^*), \text{ onde:}$$

$$\rho_i^* = \frac{\rho_i + \rho_{i-1}}{2} \quad ; \quad \theta_j^* = \frac{\theta_j + \theta_{j-1}}{2}$$

De acordo com a geometria plana, a área A de um setor circular de raio R e ângulo α é dada por:



(regra de três):

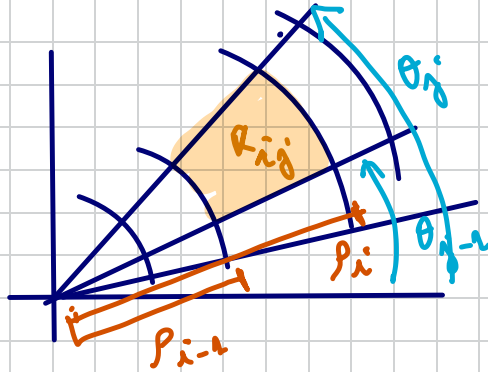
$$\frac{2\pi \text{ rad}}{\alpha} = \frac{\pi R^2}{A}$$

$$2\pi \cdot A = \alpha \cdot \pi R^2$$

$$A = \frac{\alpha R^2}{2\pi}$$

$$A = \frac{1}{2} \alpha R^2$$

Assim, teremos que a área de cada subregião R_{ij} será dada por:



$$A_{ij} = A_{\text{setor maior}} - A_{\text{setor menor}}$$

$$A_{ij} = \frac{1}{2} \cdot (\theta_j - \theta_{j-1}) \cdot r_i^2 - \frac{1}{2} \cdot (\theta_j - \theta_{j-1}) \cdot r_{i-1}^2$$

$$A_{ij} = \frac{1}{2} (\theta_j - \theta_{j-1}) \cdot [r_i^2 - r_{i-1}^2]$$

$$A_{ij} = \frac{1}{2} \underbrace{(\theta_j - \theta_{j-1})}_{\Delta\theta_j} \cdot \underbrace{(r_i - r_{i-1})}_{\Delta r_i} \cdot (r_i + r_{i-1})$$

$$A_{ij} = \Delta r_i^x \Delta \theta_j^x \cdot \underbrace{\frac{r_i + r_{i-1}}{2}}_{= r_i^x}$$

$$A_{ij} = r_i^x \cdot \Delta r_i^x \Delta \theta_j^x$$

Assim, montamos a soma de Riemann:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_i^*, y_j^*) \cdot \underbrace{\text{Vol}(R_{ij})}_{= \Delta A_{ij}} &= \\ = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(\rho_i^* \cos \theta_j^*, \rho_i^* \sin \theta_j^*) \cdot \rho_i^* \Delta \rho_i^* \Delta \theta_j^* \end{aligned}$$

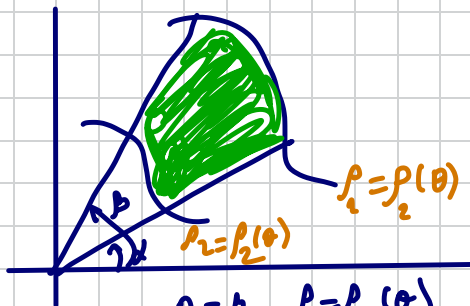
Tomando o limite com $m \rightarrow \infty$ e $n \rightarrow \infty$,
obtemos um refinamento, ou seja, obtemos:

$$\begin{aligned} \underbrace{\iint_D f(x, y) dA}_{\text{}} &= \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i, j} f(\rho_i^* \cos \theta_j^*, \rho_i^* \sin \theta_j^*) \rho_i^* \Delta \rho_i^* \Delta \theta_j^* \\ &= \int_{\rho=a}^{\rho=b} \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \cdot \rho d\rho d\theta. \end{aligned}$$

INTEGRAL EM COORDENADAS POLARES

$$\boxed{dx dy \rightarrow \rho d\rho d\theta}$$

Obs: A integral mais interna pode ser função de ρ .



$$\iint_{\Omega} f \, dA = \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} \int_{\rho=r_1(\theta)}^{\rho=r_2(\theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \cdot \rho \, d\rho \, d\theta.$$

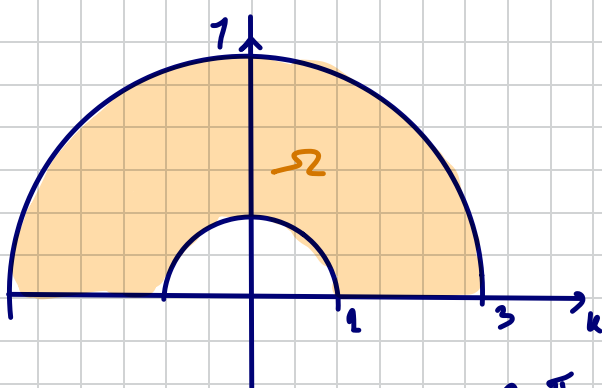
Vejam os alguns exemplos:

01) Calcule $\iint_{\Omega} (x+2y) \, dx \, dy$, sendo Ω a

região dada por:

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9 \text{ e } y \geq 0\}.$$

Solução: Desenhando a região Ω , temos:



$$\iint_{\Omega} (x+2y) \, \underline{dx \, dy} = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{\rho=1}^{\rho=3} (\rho \cdot \cos \theta + 2 \cdot \rho \sin \theta) \, \underline{\rho \, d\rho \, d\theta}$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{\rho=1}^{\rho=3} (\rho^2 \cos \theta + 2\rho^2 \sin \theta) \, d\rho \, d\theta =$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \left(\cos \theta \int_{\rho=1}^{\rho=3} \rho^2 \, d\rho + 2 \sin \theta \int_{\rho=1}^{\rho=3} \rho^2 \, d\rho \right) d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \left(\cos \theta \cdot \frac{\rho^3}{3} \Big|_1^3 + 2 \sin \theta \cdot \frac{\rho^3}{3} \Big|_1^3 \right) d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \left(\cos \theta \cdot \left(9 - \frac{1}{3}\right) + 2 \sin \theta \left(9 - \frac{1}{3}\right) \right) d\theta$$

$$= \frac{26}{3} \int_0^{\pi} \cos \theta d\theta + \frac{52}{3} \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta =$$

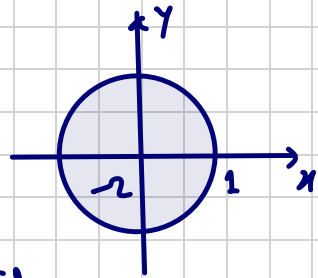
$$= \frac{26}{3} \cdot \sin \theta \Big|_0^{\pi} - \frac{52}{3} \cdot \cos \theta \Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{26}{3} \cdot (\underbrace{\sin \pi}_{=0} - \underbrace{\sin 0}_{=0}) - \frac{52}{3} \cdot (\cos \pi - \cos 0)$$

$$= 0 - \frac{52}{3} \cdot (-1 - 1) = \frac{104}{3} //$$

~~~~~

$$02) \iint_{x^2+y^2 \leq 1} e^{-x^2-y^2} dx dy.$$



$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{\rho=0}^{\rho=1} e^{-\rho^2} \cdot \rho \cdot d\rho \cdot d\theta =$$

$$x^2+y^2 = \rho^2$$

$$dx dy \rightarrow \rho d\rho d\theta$$

$$\int e^{u} du$$

$$u = -\rho^2$$

$$du = -2\rho d\rho$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left( -\frac{1}{2} \int_{\rho=0}^{\rho=1} e^{-\rho^2} \cdot (-2) \rho d\rho \right) d\theta =$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} -\frac{1}{2} \cdot e^{-\rho^2} \Big|_{\rho=0}^{\rho=1} d\theta = -\frac{1}{2} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} (e^{-1} - e^0) d\theta.$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{e} - 1 \right) \cdot \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{e} \right) \cdot \theta \Big|_0^{2\pi} =$$

$$\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{e} \right) \cdot (2\pi - 0) = \pi \cdot \left( 1 - \frac{1}{e} \right) //$$