CÁLCULO 3, TURMA T3

01/06/26 - AULA 27

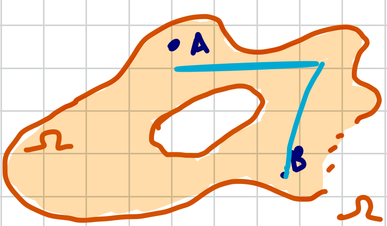
TEOREMA DA MÉDIA: Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função contínua definida em Ω, sendo Ω um conjunto compacto$^{(*)}$ e conexo$^{(**)}$. Então, $\exists\, (\alpha, \beta) \in \Omega$ tal que

$$\iint_\Omega f(x,y)\, dA = A \cdot f(\alpha, \beta),$$

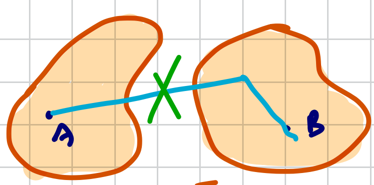
onde A denota a área da região Ω.

(*) Lembre-se: COMPACTO é um conj. limitado e fechado.

(**) Um conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ é <u>CONEXO</u> se, $\forall\, A, B \in \Omega$, for possível ligá-los por uma linha poligonal ou um caminho inteiramente contido em Ω.



Ω CONEXO.

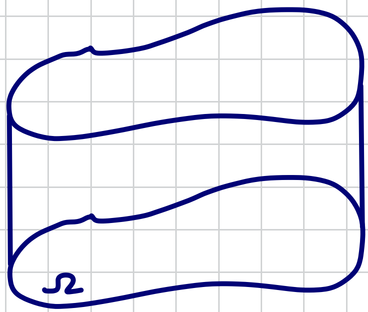


Ω NÃO CONEXO.

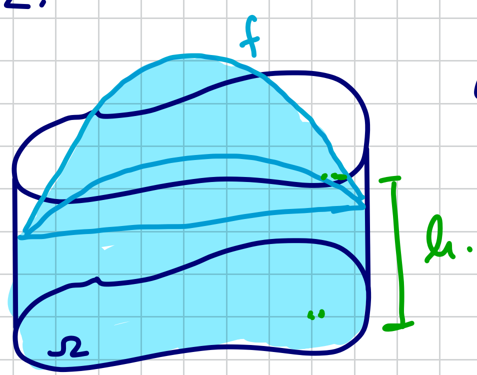
SIGNIFICADO GEOMÉTRICO PARA O TEOREMA DA MÉDIA:

Para dar um sentido de volume, considere $f \geq 0$.

Considere um recipiente cilíndrico de base sendo a região Ω.



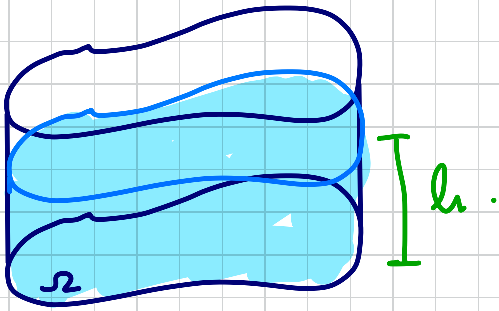
Considere $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como se fosse um sorvete de volume V, cujo superfície fosse o gráfico de f em Ω.



O volume V é dado por

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dA.$$

Derretendo-se o sorvete, e admitindo não haver perda de material nesse processo, o material vai se nivelar, atingindo uma altura h.



O volume será o volume do cilindro, dado por:

$$V = A \cdot h \; ; \quad \text{onde } A$$

denota a área da base Ω. ; ou seja:

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\, d_A = A \cdot h, \quad \text{onde}$$

$h = f(\alpha, \beta)$, para algum $(\alpha, \beta) \in \Omega$.

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA: Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ contínua, com Ω compacto e conexo.

Sendo compacto (limitado e fechado), como f é contínua, estamos nas hipóteses do teorema de Weierstrass (TEOR. DO VALOR EXTREMO); ou seja, f assume valores máximo e mínimo em Ω.

Sejam (x_0, y_0), $(x_1, y_1) \in \Omega$, tais que

$$f(x_0, y_0) = \min_{\Omega} f \quad \text{e} \quad f(x_1, y_1) = \max_{\Omega} f$$

Então, $\forall (x,y) \in \Omega$, tem-se que

$$f(x_0, y_0) \leq f(x,y) \leq f(x_1, y_1)$$

Integrando em Ω, vem:

$$\iint_{\Omega} \underbrace{f(x_0, y_0)}_{\text{CONST.}} dA \leq \iint_{\Omega} f(x,y)\, dA \leq \iint_{\Omega} \underbrace{f(x_1, y_1)}_{\text{CONST.}} dA$$

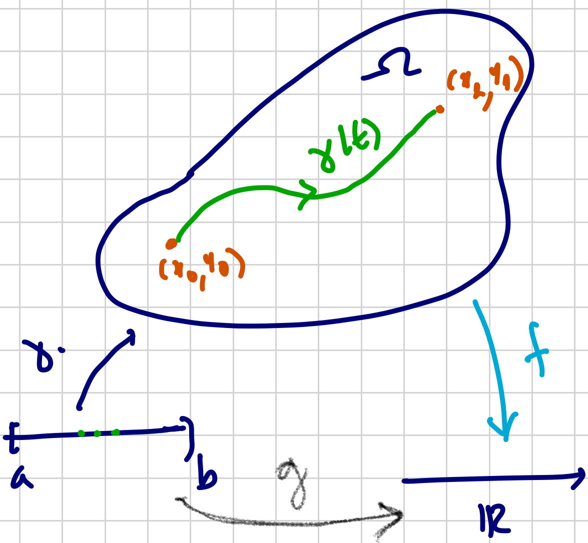
$$f(x_0, y_0) \cdot \underbrace{\iint_{\Omega} dA}_{\text{ÁREA DE } \Omega} \leq \iint_{\Omega} f(x,y)\, dA \leq f(x_1, y_1) \underbrace{\iint_{\Omega} dA}_{\text{ÁREA DE } \Omega}$$

Denotando a área de Ω por A, vamos obter:

$$f(x_0, y_0) \cdot A \leq \iint_{\Omega} f(x,y)\, dA \leq f(x_1, y_1) \cdot A$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x_0, y_0) \leq \frac{1}{A} \cdot \iint_{\Omega} f(x,y)\, dA \leq f(x_1, y_1)} \cdot \quad (*)$$

Como Ω é conexo, seja γ um caminho contido em Ω, ligando os pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1).



Define $\gamma : [a,b] \to \Omega$ por

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)),$$

onde

$\gamma(a) = (x_0, y_0)$ e

$\gamma(b) = (x_1, y_1)$,

contínua.

Já temos $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ contínua.

Define $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ por:

$$g(t) = f(\gamma(t)) = (f \circ \gamma)(t)$$

Logo, $g(a) = f(\gamma(a)) = f(x_0, y_0)$;

$g(b) = f(\gamma(b)) = f(x_1, y_1)$

Por construção, g é contínua, pois f e γ o são. Além disso, note que, de (*) temos:

$$g(a) \leq \frac{1}{A} \iint_{\Omega} f(x,y)\, dA \leq g(b)$$

Então, estamos nas hipóteses do TEOREMA DO VALOR INTERMEDIÁRIO (I) (T.V.I)

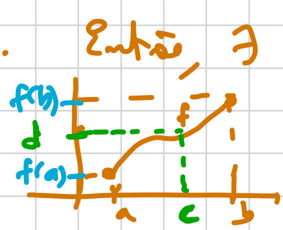
Então, $\exists\, t_0 \in [a,b]$, tal que

$$g(t_0) = \frac{1}{A} \cdot \iint_{\Omega} f(x,y)\, dA \quad ; \text{ onde}$$

(I) T.V.I: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ cont; com

$f(a) < d < f(b)$. Então, $\exists\, c \in [a,b]$

tal que $f(c) = d$.



$g(t_0) = f(\gamma(t_0))$; onde $\gamma(t_0) = (\alpha, \beta)$, para algum $(\alpha, \beta) \in \Omega$.

Ou seja, $g(t_0) = f(\alpha, \beta)$; $(\alpha, \beta) \in \Omega$,

i.e.;

$$f(\alpha, \beta) = g(t_0) = \frac{1}{A} \iint_{\Omega} f(x, y)\, dA.$$

$$\Rightarrow \quad \iint_{\Omega} f(x, y)\, dA = A \cdot f(\alpha, \beta)$$

$\square$

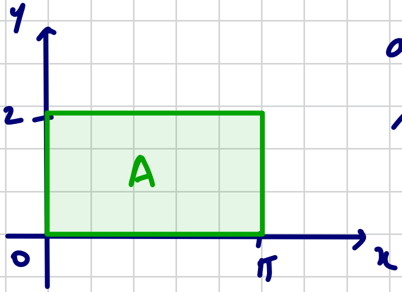
Obs.: $f(\alpha, \beta)$ chama-se VALOR MÉDIO DA FUNÇÃO.

Ex.: Calcule o valor médio de $f(x, y) = y \cos x$, em $A = [0, \pi] \times [0, 2]$.

Solução: O valor médio será $f(\alpha, \beta)$; onde

$$f(\alpha, \beta) = \frac{1}{A} \cdot \iint_{\Omega} f(x, y)\, dA.$$

$\underline{\underline{A}}$:

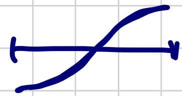


a área da região será:

$A = b.h$

$A = \pi . 2 = \underline{\underline{2\pi}}$

Então, o valor médio será dado por:



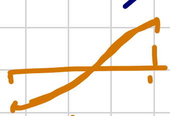
$$f(\alpha,\beta) = \frac{1}{A} . \iint_{\Omega} f(x,y)\, dA$$

$$f(\alpha,\beta) = \frac{1}{2\pi} . \int_{y=0}^{y=2} \int_{x=0}^{x=\pi} y . \cos x . \, dx\, dy$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{y=0}^{y=2} y . \left(\int_{x=0}^{x=\pi} \cos x \, dx \right) dy$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{y=0}^{y=2} y . \operatorname{sen} x \Big|_0^{\pi} dy$$

$$= \frac{1}{2\pi} . \int_{y=0}^{y=2} y . (\underbrace{\operatorname{sen}\pi}_{0} - \underbrace{\operatorname{sen}0}_{0})\, dy = \underline{\underline{0}}$$



TEM-SE UMA SIMETRIA NO

RETÂNGULO A, TAL QUE A MÉDIA DO VOLUME CAI A ZERO.

RESOLUÇÃO DE EXERCÍCIOS DA LISTA 07:

1. Sejam $A \subset \mathbb{R}^m$ um bloco do $\mathbb{R}^m$, $f : A \to \mathbb{R}$ integrável, e sejam

$$m = \inf\{f(x) : x \in A\} \text{ e } M = \sup\{f(x) : x \in A\}.$$

Mostre que

$$m \leq \frac{\int_A f(x)dx}{\text{Vol}(A)} \leq M.$$

Note que, $\forall\, x \in A \subset \mathbb{R}^m$, tem-se que

$$m \leq f(x) \leq M.$$

Integrando no bloco A, vem:

$$\int_A m\, dx \leq \int_A f(x)dx \leq \int_A M.dx$$

$$\Rightarrow \quad m.\underbrace{\int_A dx}_{\text{Vol}(A)} \leq \int_A f(x)dx \leq M.\underbrace{\int_A dx}_{\text{Vol}(A)}.$$

$$m.\text{Vol}(A) \leq \int_A f(x)dx \leq M.\text{Vol}(A) \quad \div \text{Vol}(A)$$

$$m \leq \frac{1}{\mathrm{Vol}(A)} \cdot \int_A f(x)dx \leq M.$$

2. Adicionando a hipótese no exercício anterior de que f é contínua no bloco A, conclua que existe $c \in A$ tal que[1]

$$\int_A f(x)dx = f(c) \cdot \mathrm{Vol}A.$$

Como, pelo exercício anterior, como um bloco é compacto, então,

$$\exists\ m = \min_{\Omega} f \quad e \quad \exists\ M = \max_{\Omega} f.$$

Ou seja,

$$m = f(x_0, y_0) \quad e \quad M = f(x_1, y_1).$$

Então, temos

$$f(x_0, y_0) \leq \frac{\int_A f(x)dx}{\mathrm{Vol}(A)} \leq f(x_1, y_1);$$

Pelo T.V.I., $\exists\ c \in A \subset \mathbb{R}^m$, tal que

$$f(c) = \frac{\int_A f(x)dx}{\mathrm{Vol}(A)}$$

$$\Rightarrow \int_A f(x)dx = f(c) \cdot \mathrm{Vol}(A).$$

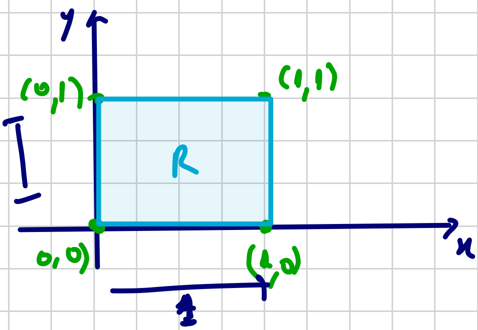
3. Encontre um intervalo fechado que contenha o valor da integral dupla dada em cada caso (**Obs.:** use o exercício 2).

(a) $\int_R\int (x^2+y^2)dA$, onde R é a região retangular com vértices em $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ e $(0,1)$.

(b) $\int_R\int e^{xy}dA$, onde R é a região retangular com vértices em $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ e $(0,1)$.

(c) $\int_A (x+y)e^{yz}dxdydz$, onde A é o bloco $[1,3]\times[0,2]\times[1,4]$.

(b) $\iint_R e^{xy} dA$.



$Vol(R)$ = ÁREA DO QUADRADO.

$\rightarrow Vol(R) = 1 \times 1 = 1$

A função $f(x,y) = e^{x.y}$ assume valores máximo e mínimo no quadrado R, pois o mesmo é compacto. O menor valor será:

$$m = f(0,0) = e^{0.0} = e^0 = 1.$$

O maior valor será:

$$M = f(1,1) = e^{1.1} = e.$$

Então,

$$m \leq \frac{\iint_R e^{xy}\,dA}{\text{Vol}(R)} \leq M$$

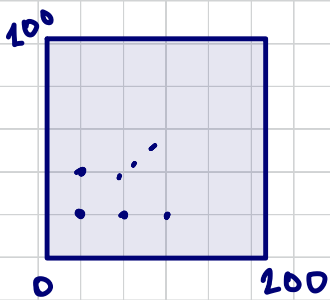
$$1 \leq \frac{\iint_R e^{xy}\,dA}{1} \leq e$$

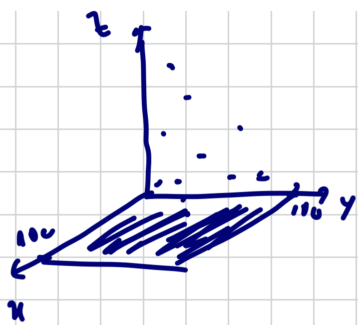
$$1 \leq \iint_R e^{xy}\,dA \leq e.$$

4. Sem efetuar cálculo algum, explique por quê a função $f : A = [0,100] \times [0,100] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2, \text{ se } (x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ 0, \quad \text{caso contrário} \end{cases}$$

é integrável no bloco A. E qual seria o valor? Se substituirmos o bloco A por todo o $\mathbb{R}^2$, as conclusões acima mudariam? Justifique.





Esta função não é contínua nos pontos (a,b) com $a,b \in \mathbb{N}$; ou seja em um conj. discreto do plano (retângulo)

Logo, med(D_f) dos pontos de descontinuidade desta função é zero. Logo, pelo T. de Lebesgue, f é integrável.

Neste caso, $\iint_A f = 0$, pois

$f \equiv 0$, exceto em um conjunto de medida nula.

Substituindo o bloco A por todo o $\mathbb{R}^2$ os resultados seguiriam os mesmos, pois, a medida de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ em $\mathbb{R}^2$ continua sendo nula, então o conjunto de pontos de descontinuidade de f continuaria tendo medida nula, e f seria integrável.