

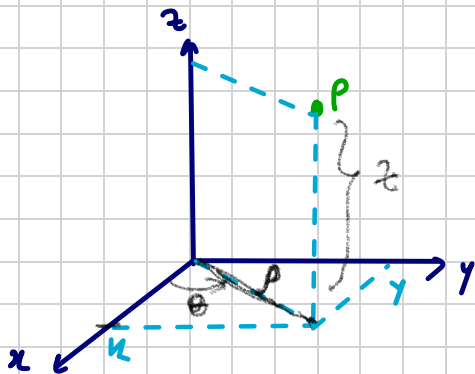
Na aula passada vimos a fórmula de mudança geral de variáveis no $\mathbb{R}^3$:

$$\iiint_{\mathcal{R}} f(x, y, z) dV = \iiint_{\mathcal{R}'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \cdot |\det J(T)(u, v, w)| du dv dw$$

FÓRMULA DA MUDANÇA NO $\mathbb{R}^3$ PARA O SISTEMA uvw .

Vejam os outros exemplos de aplicação:

EX: SISTEMA DE COORDENADAS CILÍNDRICAS: é o sistema de coordenadas polares estendido para o $\mathbb{R}^3$. Ou seja, marcamos o sistema polar no plano xy , e depois levantamos uma altura z , formando assim um "cilindro".



$$P(x, y, z) \leftrightarrow P(\rho, \theta, z)$$

onde

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

Dessa forma, a mudança para o sistema cilíndrico (ρ, θ, z) é dada por:

$$T = \begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

Assim, a matriz jacobiana da mudança de variáveis será dada por:

$$J(T)(\rho, \theta, z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \rho} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\rho \sin \theta & \rho \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim;

Let $J(T)(\rho, \theta, z) =$

$$\begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\rho \sin \theta & \rho \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \rho \cos^2 \theta + 0 + 0 - 0 - 0 + \rho \sin^2 \theta$$

$$= \rho \cos^2 \theta + \rho \sin^2 \theta = \rho (\underbrace{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}_{=1}) = \underline{\underline{\rho}}$$

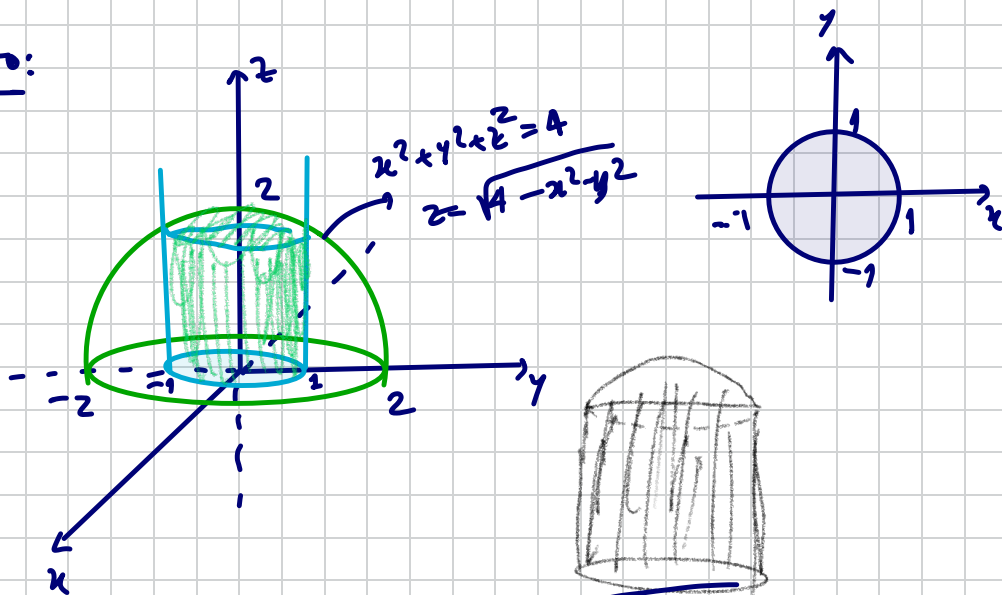
Dada função, sendo $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, então:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \iiint_{\Omega} f(x(\rho, \theta, z), y(\rho, \theta, z), z(\rho, \theta, z)) \cdot \rho \cdot d\rho d\theta dz.$$

Veja um exemplo de aplicação:

Ex: Calcule o volume do sólido abaixo de semi-esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$; $z \geq 0$, limitado pelo cilindro $z^2 + y^2 = 1$ e pelo plano xy , usando integrais triplas.

Solução:



$$V = \iiint_{\Omega} dV = \iint_R dx dy \int_{z=0}^{z=\sqrt{4-x^2-y^2}} dz = \iint_R \sqrt{4-x^2-y^2} dx dy$$

$\rho^2 = x^2 + y^2$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{\rho=0}^{\rho=1} \int_{z=0}^{z=\sqrt{4-\rho^2}} \rho \, d\rho \, d\theta \, dz =$$

CORRECT. CYLINDRICAL
 let (ρ, θ, z)

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{\rho=0}^{\rho=1} \rho \cdot \int_{z=0}^{z=\sqrt{4-\rho^2}} dz \, d\rho \, d\theta =$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{\rho=0}^{\rho=1} \rho \cdot z \Big|_{z=0}^{z=\sqrt{4-\rho^2}} d\rho \, d\theta =$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{\rho=0}^{\rho=1} \rho \cdot \sqrt{4-\rho^2} \, d\rho \, d\theta =$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \int_{\rho=0}^{\rho=1} (4-\rho^2)^{\frac{1}{2}} (-2\rho) \, d\rho =$$

$$\int r^k \, dr = \frac{r^{k+1}}{k+1} + C$$

$$r = 4 - \rho^2 \rightarrow dr = -2\rho \, d\rho$$

$$= \theta \Big|_0^{2\pi} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left. \frac{(4-\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right|_0^1 =$$

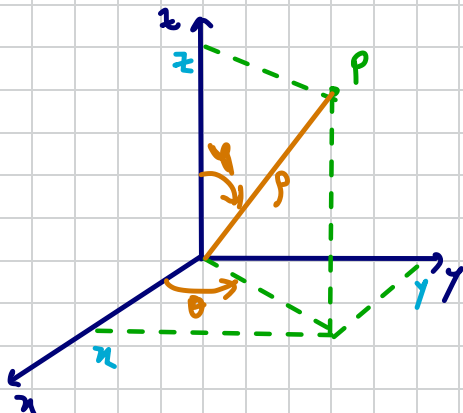
$$= \cancel{2\pi} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{2}{3} \cdot \left[3^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}} \right] \text{ u.m.}$$

$$= -\frac{2\pi}{3} \cdot \left[3^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}} \right] \text{ u.m.}$$

$$= \frac{2\pi}{3} \cdot \left[4^{\frac{3}{2}} - 3^{\frac{3}{2}} \right] \cdot \text{u.m.}$$

SISTEMA DE COORDENADAS ESFÉRICAS:

Os pontos do $\mathbb{R}^3$ são dados por coordenadas localizadas em uma esfera.



$$P(x, y, z) \leftrightarrow P(\rho, \varphi, \theta)$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$0 \leq \varphi \leq \pi$$

$$\rho \in \mathbb{R}.$$

Trataremos as mudanças na próxima aula.