

INTEGRAIS TRIPLAS:

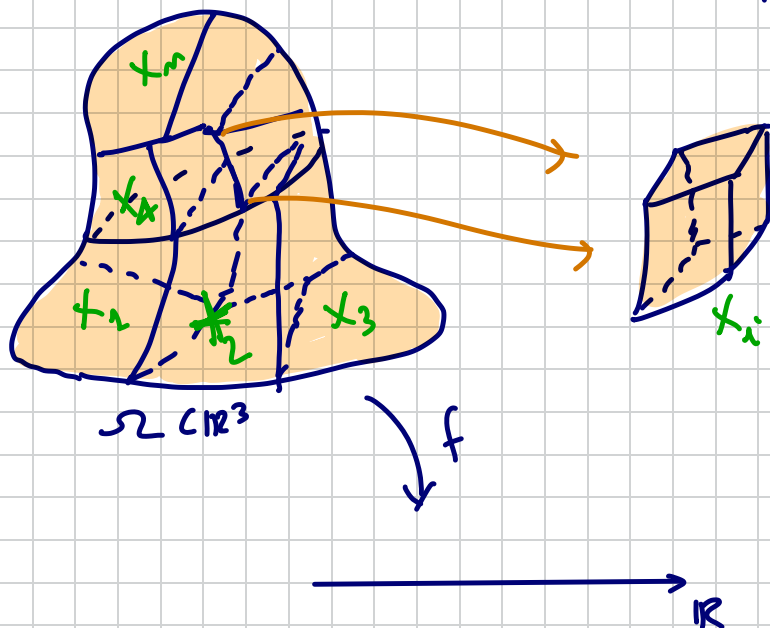
Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função, $w = f(x, y, z)$,
definida em um conjunto j -mensurável Ω de $\mathbb{R}^3$.

Seja $D = \{X_1, X_2, X_3, \dots, X_m\}$ uma decomposição do conjunto Ω , ou seja:

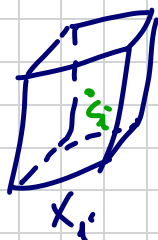
$$\Omega = X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup \dots \cup X_m;$$

onde

$$\text{int}(X_i) \cap \text{int}(X_j) = \emptyset; \quad \forall i \neq j.$$



Em cada conjunto X_i destaque um elemento c_i e construa a seguinte decomposição pontilhada:



$$\Sigma(f; D) = \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \text{Vol}(X_i),$$

que é uma soma de Riemann.

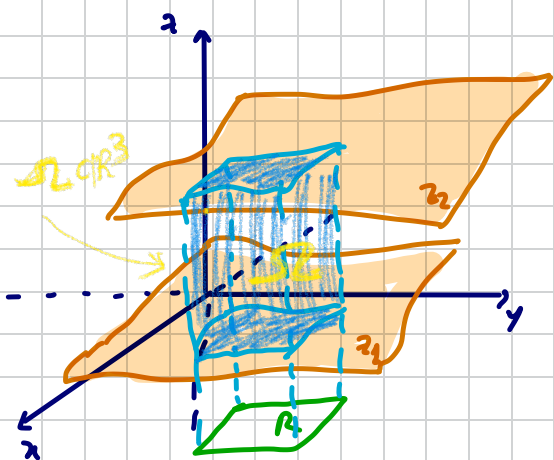
Definimos a integral tripla de f em Ω como sendo o limite da soma de Riemann quando $n \rightarrow \infty$, ou seja:

$$\iiint_{\Omega} f = \lim_{n \rightarrow \infty} \Sigma(f; D)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \text{Vol}(X_i)$$

$$\Rightarrow \iiint_{\Omega} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \text{Vol}(X_i)$$

Na prática, uma integral tripla costuma ser decomposta em uma integral dupla combinada com uma integral simples, pois, geralmente, o domínio Ω fica compreendido entre duas superfícies z_1 e z_2 , como por exemplo:



$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dz dy dx &= \\ &= \iint_R dx dy \underbrace{\int_{z=z_1}^{z=z_2} f(x, y, z) dz}_{\text{FUNÇÃO DE } x \text{ E } y.} \end{aligned}$$

A medida do volume V da região Ω é dada

por

$$V = \iiint_{\Omega} dx dy dz = \iiint_{\Omega} dV.$$

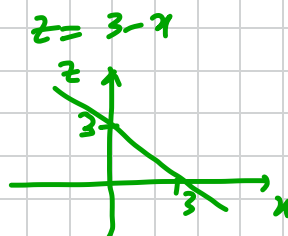
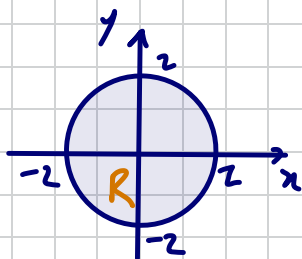
De fato; seja $A \subset \mathbb{R}^3$ um paralelepípedo contendo Ω .
Então, temos que:

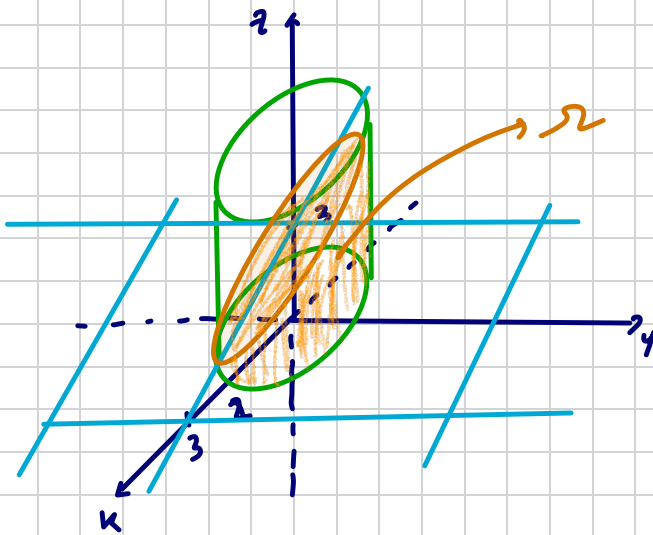
$$\begin{aligned}
 \underbrace{V} &= \iiint_A \underbrace{\xi(x, y, z)}_{\substack{\text{"1"} \\ L}} dx dy dz = \\
 &= \iiint_{\substack{\Omega \\ \text{"1"} \\ L}} \xi(x, y, z) dx dy dz + \iiint_{\substack{A \setminus \Omega \\ \text{"0"} \\ O}} \xi(x, y, z) dx dy dz \\
 &= \iiint_{\substack{\Omega \\ \text{wavy}}} dx dy dz = \iiint_{\substack{\Omega \\ \text{wavy}}} dV.
 \end{aligned}$$

Não que segue, apresentamos alguns exemplos de cálculo de integral tripla.

01) Ache o volume V do sólido obtido pela região cortada do cilindro $x^2 + y^2 = 4$ pelos planos $z=0$ e $x+z=3$.

solução:

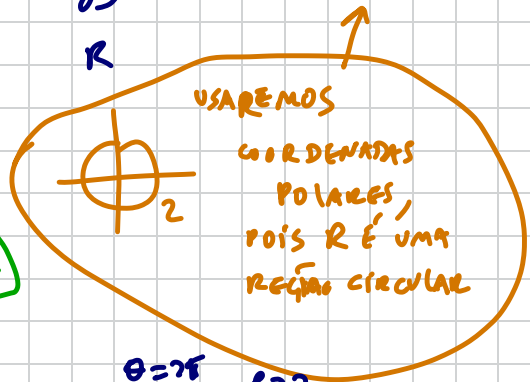




$$V = \iiint_{\Omega} dV = \iiint_{\Omega} dx dy dz = \iint_R dx dy \int_{z=0}^{z=3-x} dz =$$

$$= \iint_R dx dy \cdot z \Big|_{z=0}^{z=3-x} = \iint_R (3-x) dx dy =$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \rho \cos \theta \\ dx dy &= \rho d\rho d\theta \end{aligned}}$$



$$= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{\rho=0}^{\rho=2} (3 - \rho \cos \theta) \cdot \rho d\rho d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left(\int_{\rho=0}^{\rho=2} (3\rho - \rho^2 \cos \theta) d\rho \right) d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left(\frac{3\rho^2}{2} - \frac{\rho^3}{3} \cdot \cos\theta \right) \Big|_{\rho=0}^{\rho=2} d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left(6 - \frac{8}{3} \cos\theta - 0 \right) d\theta =$$

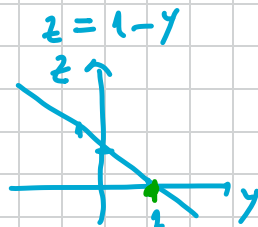
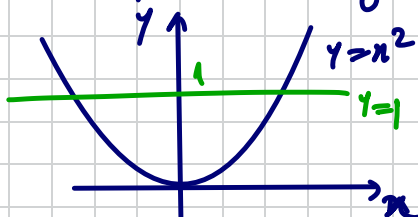
$$= \left(6\theta - \frac{8}{3} \sin\theta \right) \Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = 6 \cdot (2\pi) - \frac{8}{3} \underbrace{\sin 2\pi}_{0''} - \left(0 - \frac{8}{3} \underbrace{\sin 0}_{0''} \right)$$

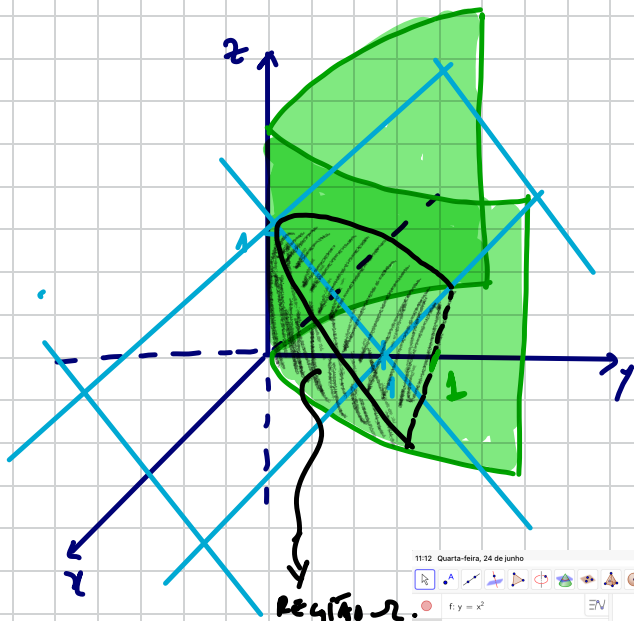
$$= 12\pi \text{ u.v.}$$

↳ UNIDADES DE VOLUME.

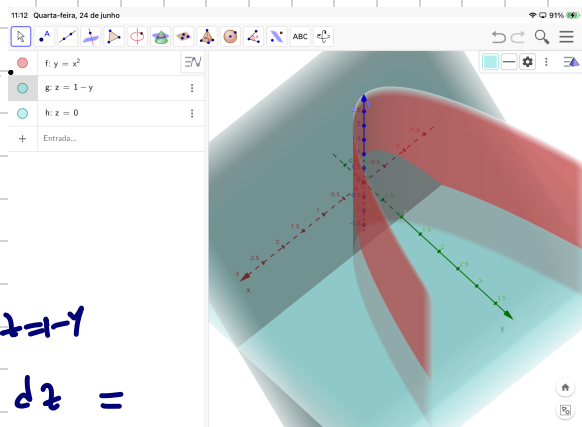
02) Use integral tripla para determinar o volume do sólido limitado pelo cilindro $y = x^2$ e pelos planos $z = 0$ e $y + z = 1$.

Solução: Esboço da região r :



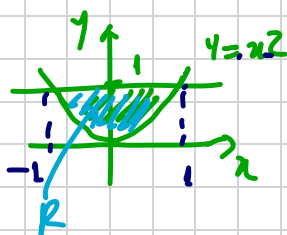


Região Ω



$$V = \iiint_{\Omega} dV = \iiint_{\Omega} dx dy dz =$$

$$= \int_R \int_{z=0}^{z=1-y} \int_{x=0}^{x=y} dz dy dx =$$



$$= 2 \cdot \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=x^2}^{y=1} \int_{z=0}^{z=1-y} dz dy dx =$$

PELA SIMETRIA DO PROBLEMA

$$= 2 \cdot \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=x^2}^{y=1} dy \cdot x \cdot z \Big|_{z=0}^{z=1-y} =$$

$$= 2 \cdot \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=x^2}^{y=1} (1-y) dy dx = 2 \cdot \int_{x=0}^{x=1} \left(y - \frac{y^2}{2} \right) \bigg|_{y=x^2}^{y=1} dx =$$

$$= 2 \cdot \int_{x=0}^{x=1} \left[1 - \frac{1}{2} - \left(x^2 - \frac{x^4}{2} \right) \right] dx =$$

$$= 2 \cdot \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - x^2 + \frac{x^4}{2} \right) dx = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}x - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^5}{5} \right) \bigg|_0^1 =$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} \right) = 2 \cdot \left(\frac{15-10+3}{30} \right) = 2 \cdot \frac{8}{30} = \frac{8}{15} \text{ u.r.}$$
