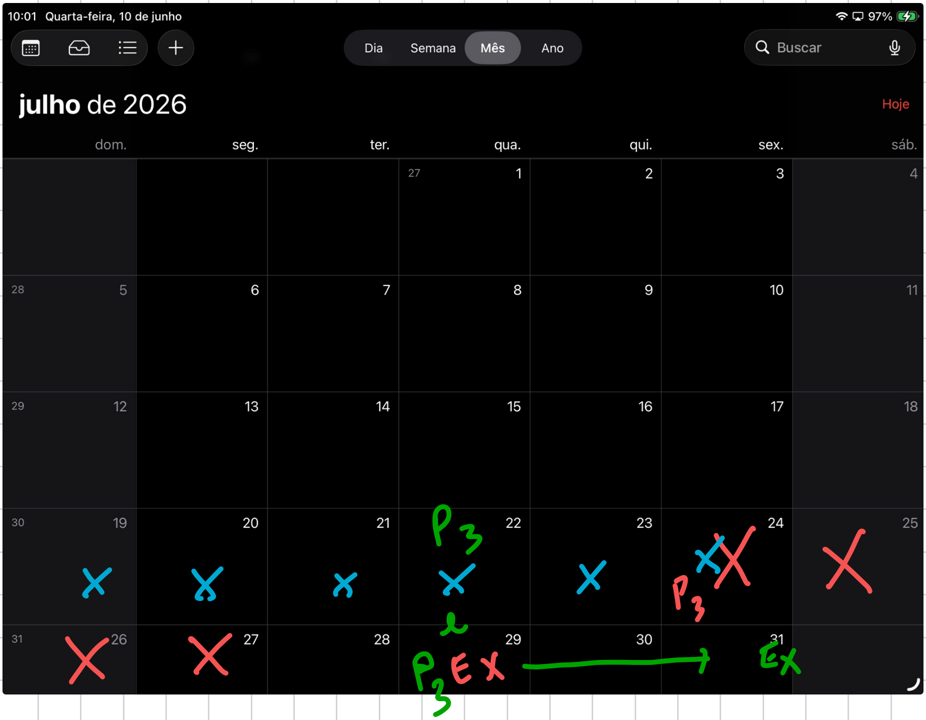
Cálculo 3, Turma T2

$\boxed{10/06/26 \text{ – Aula 30}}$

Obs.: Alteração das datas das provas P_3 e Ex. :



Lista 06

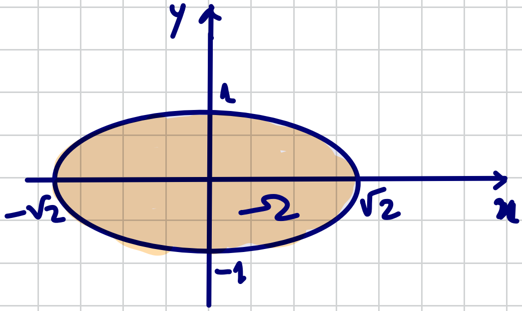
7. Classifique os extremos relativos das seguintes funções:

(a) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$ na região $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (x-2)^2 + y^2 \leq 1\}$.
[Resp.: máx $(1,0)$ e mín $(3,0)$]

(b) $f(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{2\sqrt{2}}{3}$ na elipse $x^2 + 2y^2 \leq 1$.
[Resp.: máx $(\pm\frac{2}{\sqrt{5}}, \pm\frac{1}{\sqrt{10}})$, min $(0,0)$].

(b) $f(x,y) = x^2 + y^2 + \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ na elipse

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} \leq \frac{1}{2}$$



PONTOS CRÍTICOS: onde $\nabla f = (0,0)$, ou seja, onde

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x = 0 \iff x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2y = 0 \iff y = 0 \end{aligned}\right\} \text{PONTO CRÍTICO: } \underline{\underline{A(0,0)}}.$$

Note que, como f é contínua em Ω dado pela elipse, e Ω é compacto; então f assume MÁXIMO e MÍN. (T. DE WEIERSTRASS)

Como encontramos apenas um ponto crítico então pelo menos um dos extremos ocorre na fronteira $\partial\Omega$.

Primeiramente analisemos o ponto crítico encontrado: $A(0,0)$.

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} \quad ; \text{ onde:}$$

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2x) = 2$$

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(2x) = 0$$

$$f_{yx} = 0 \quad (\text{T. SCHWARZ})$$

$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(2y) = 2$$

$$\Rightarrow H(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Então; $H(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Disso; $\det H(0,0) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 0 = 4 > 0$

Logo, $A(0,0)$ é um extremo relativo;

e como

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2 > 0 \text{, segue que}$$

$A(0,0)$ é um ponto de MÍNIMO RELATIVO.

Então, o ponto de máximo ocorrerá na $\partial\Omega$;

ou seja, onde $x^2 + 2y^2 = 1. \Longleftrightarrow x^2 = 1 - 2y^2$

$$x = \sqrt{1-2y^2}$$

Define $g(t)$ por

$$g(t) = f(x(t), y(t))$$

$$= x^2(t) + y^2(t) + \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$= 1 - 2y^2 + y^2 + \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$= 1 \underbrace{-y^2}_{= t} + \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\Rightarrow g(t) = 1 - t^2 + \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

pontos críticos: onde $g'(t) = 0$.

$$-2t = 0 \iff t = 0$$

$$\boxed{g'(t) = -2t}$$

$g' > 0$ $\quad$ $g' < 0$

$+ +$ $\quad$ $- -$

t

g tem um ponto de máx. quando $\underline{\underline{t=0}}$.

Neste caso;

$$\begin{cases} y = t \\ x = \sqrt{1-2t^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = \sqrt{1} = \pm 1. \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Ou seja, temos

máx. em $B(1,0)$; $C(-1,0)$.

L5

2. De cada função vetorial a seguir, obtenha a matriz Jacobiana:

(a) $f(x,y) = (e^{x^2+y^2}, 2x^2y + 3y^2, \sqrt{x^2+y^2})$

(b) $f(x,y,z) = (\underbrace{x^2+y^2+z^2}_{f_1}, \underbrace{xyz}_{f_2}, \underbrace{\cos xy}_{f_3}, \underbrace{x^2-yz}_{f_4})$

(b) $df_a = ?$ $\qquad f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$

$$\Rightarrow df_a = [\ ]_{4\times 3}$$

$$df_a = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} \end{bmatrix}(a) \quad , \text{ onde} \quad f_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

$$f_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2) = 2x$$

$$f_{12} = \frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2+z^2) = 2y$$

$$f_{13} = \frac{\partial f_1}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(x^2+y^2+z^2) = 2z$$

$$f_{21} = \frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(xyz) = yz$$

$$f_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(xyz) = xz$$

$$f_{23} = \frac{\partial f_2}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(xyz) = xy$$

$$f_{31} = \frac{\partial f_3}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\cos xy) = -y \cdot \operatorname{sen} xy$$

$$f_{32} = \frac{\partial f_3}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\cos xy) = -x \cdot \operatorname{sen} xy$$

$$f_{33} = \frac{\partial f_3}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(\cos xy) = 0$$

$$f_{41} = \frac{\partial f_4}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - yz) = 2x$$

$$f_{42} = \frac{\partial f_4}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - yz) = -z$$

$$f_{43} = \frac{\partial f_4}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(x^2 - yz) = -y$$

Assim:

$$df_a = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z \\ yz & xz & xy \\ -y \operatorname{sen} xy & -x \operatorname{sen} xy & 0 \\ 2x & -z & -y \end{bmatrix} //$$

LS

3. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y^2}{x^4+y^4}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Mostre que $\dfrac{\partial}{\partial x} f(0,0)$ e $\dfrac{\partial}{\partial y} f(0,0)$ existem, mas que f não é diferenciável na origem.

- $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - \overbrace{f(0,0)}^{=0}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{\left(\frac{3.h^2.0^2}{h^4+0^4}\right)}^{0}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0}$$

- $$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{\left(\frac{3.0^2.h^2}{0^4+h^4}\right)}^{=0}}{h} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0}$$

2ª parte do exercício: mostrar que f não é diferenciável na origem.

Sabemos o seguinte resultado:

<u>PROP.</u>: Se f for diferenciável em um ponto, então f é contínua nesse ponto.

A negação desse resultado é uma afirmação válida, que é:

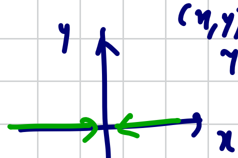
"se f não for contínua em um ponto, então f não é diferenciável nesse ponto."

$$\left[P \Rightarrow Q \vdash \sim Q \Rightarrow \sim P \right]$$

Assim, para mostrar que a f dada não é diferenciável na origem, basta mostrar que não é contínua ali.

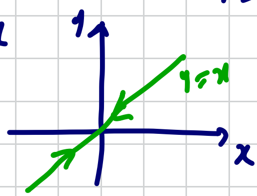
Note que:

- $\displaystyle \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=0}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=0}} \frac{3x^2y^2}{x^4+y^4} =$



$$= \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \frac{3x^2\cdot 0^2}{x^4+0^4} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \frac{0}{x^4} = 0$$

$$\bullet \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \frac{3x^2y^2}{x^4+y^4} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \frac{3x^2x^2}{x^4+x^4} =$$



$$= \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \frac{3\cancel{x^4}}{2\cancel{x^4}} = \frac{3}{2}$$

Assim, como por caminhos diferentes obtemos limites diferentes, segue que f não é contínua na origem, e, portanto, não é diferenciável na origem.

L5

5. Calcule as diferenciais totais de cada função a seguir:

(a) $z = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(b) $z = \ln(xy+y^2)$

(c) $z = \arctan \dfrac{x+y}{1-xy}$

(d) $z = \dfrac{ye^x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(e) $z = \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})$

(f) $z = \dfrac{x \sin y}{\cos(xy)}$

Recorde que o incremento Δf de uma função, se f for diferenciável, é escrito por:

$$\Delta f = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y}_{\text{DIFERENCIAL TOTAL}} + \varepsilon_1 . \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y,$$

com $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \xrightarrow[(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)]{} 0$

O diferencial total é definido por:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

Voltando ao exercício: $f(x,y) = \ln(\underbrace{xy + y^2}_{})$

- $$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\overbrace{\frac{\partial}{\partial x}(xy+y^2)}^{u'}}{xy+y^2} = \frac{y}{xy+y^2} = \frac{\overset{u}{\cancel{y}}}{\cancel{y}(x+y)} = \frac{1}{x+y}$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

- $$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\frac{\partial}{\partial y}(xy+y^2)}{xy+y^2} = \frac{x+2y}{xy+y^2}$$

Assim:

$$\underline{df} = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} . dy = \underline{\frac{1}{x+y} dx + \frac{x+2y}{xy+y^2} dy}$$