CÁLCULO 3, TURMA T2.

$\boxed{\text{01/06/26 – AULA 27}}$

TEOREMA DA MÉDIA: Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função contínua em Ω, sendo Ω compacto$^{(*)}$ e conexo$^{(**)}$.

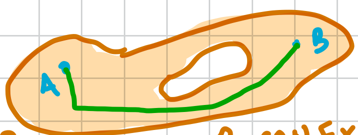
Então, $\exists\ (\alpha, \beta) \in \Omega$ tal que

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\, dA = A \cdot f(\alpha, \beta),$$ onde A

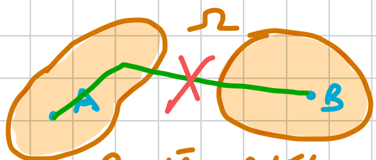
denota a área da região Ω.

(*) Lembre-se: compacto significa limitado e fechado.

(**) Um conj. $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ é conexo se, $\forall\ A, B \in \Omega$, for possível ligar estes pontos por um caminho inteiramente contido em Ω.



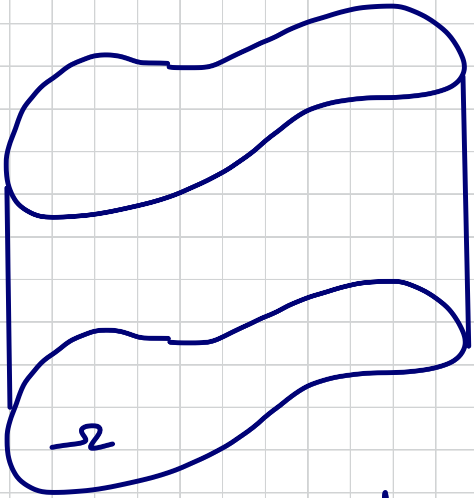
Ω Ω CONEXO



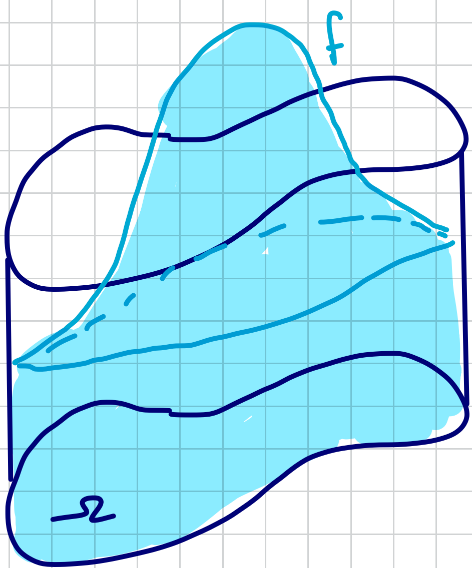
Ω NÃO-CONEXO.

SIGNIFICADO GEOMÉTRICO DO TEOREMA DA MÉDIA:

Assuma $f \geq 0$ em $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Considere um cilindro cuja base seja Ω ("exótico")



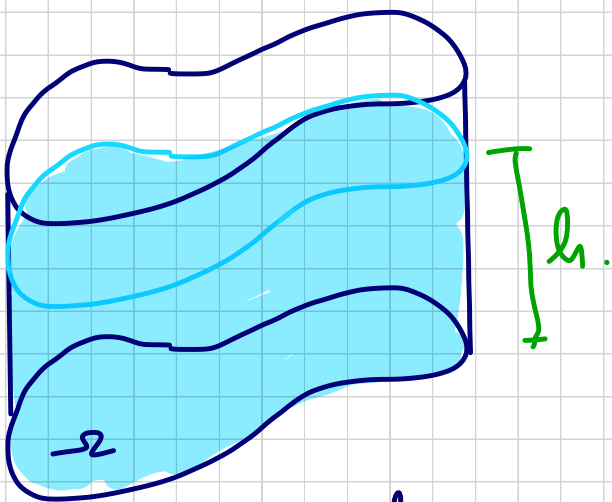
Considere agora um sorvete no interior desse copo exótico, sendo sua superfície dada pelo gráfico de f.



A medida do volume V desse sorvete é dada por

$$V = \iint_{\Omega} f(x,y)\,dA.$$

Derretendo-se o sorvete, assumindo que não vai haver perda de material, o volume V permanecerá o mesmo; e atingirá uma altura intermediária h:



$$V = A \cdot h.$$

$$\Rightarrow \iint_{\Omega} f(x,y)\,dA = A \cdot h., \text{ onde}$$

$$h = f(\alpha,\beta); \quad (\alpha,\beta) \in \Omega.$$

<u>DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA:</u> Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ contínua, com Ω compacto e conexo.

Devido à compacidade de Ω, pelo teorema de Weierstrass (TEOR. DO VALOR EXTREMO), segue que f assume valores máximo e mínimo em Ω; ou seja,

$$\exists\ (x_0, y_0) \in \Omega \ ,\ \exists\ (x_1, y_1) \in \Omega \ , \text{ tem que}$$

$$f(x_0, y_0) = \min_{\Omega} f \quad \text{e} \quad f(x_1, y_1) = \max_{\Omega} f.$$

Então, $\forall\ (x, y) \in \Omega$, tem-se que

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \leq f(x_1, y_1)$$

Integrando em Ω, vem:

$$\iint_{\Omega} \underbrace{f(x_0, y_0)}_{\text{CONST.}} dA \leq \iint_{\Omega} f(x, y)\, dA \leq \iint_{\Omega} \underbrace{f(x_1, y_1)}_{\text{CONST.}} dA.$$

$$\Rightarrow \quad f(x_0,y_0)\cdot \underbrace{\iint_\Omega dA}_{\text{área de } \Omega} \leq \iint_\Omega f(x,y)\,dA \leq f(x_1,y_1)\cdot \underbrace{\iint_\Omega dA}_{\text{área do } \Omega}.$$

Denotando por A a área da região Ω, temos:

$$f(x_0,y_0)\cdot A \leq \iint_\Omega f(x,y)\,dA \leq f(x_1,y_1)\cdot A$$

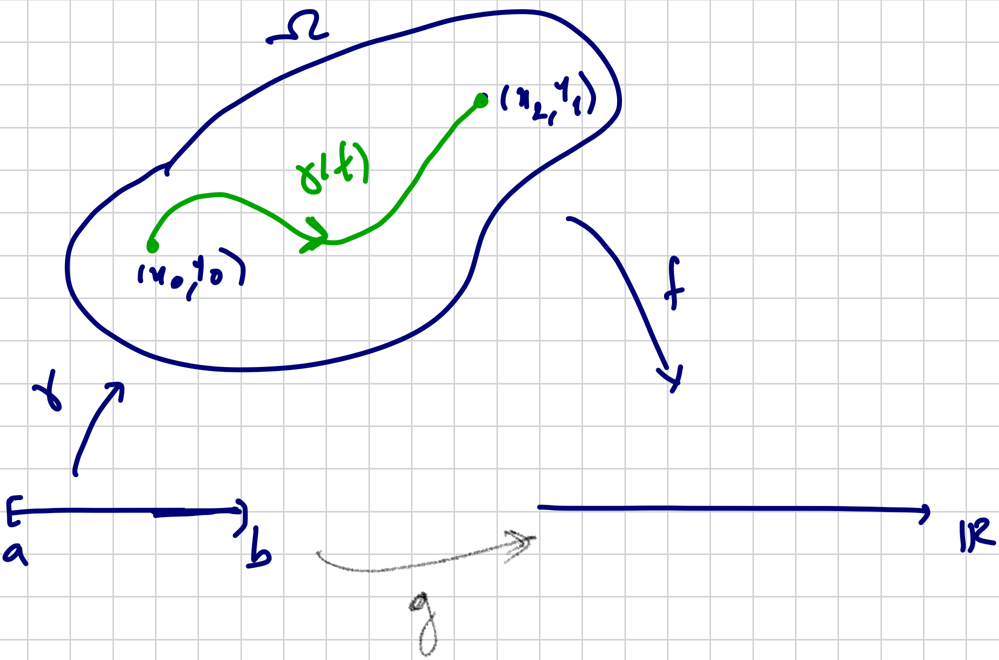
$$\Rightarrow \boxed{f(x_0,y_0) \leq \frac{1}{A}\cdot \iint_\Omega f(x,y)\,dA \leq f(x_1,y_1)} \quad (I)$$

Como Ω é conexo, seja $\gamma:[a,b] \to \Omega \subset \mathbb{R}^2$ um caminho de (x_0,y_0) até (x_1,y_1), contido em Ω; tal que

$$\gamma(a) = (x_0,y_0)$$

$$\gamma(b) = (x_1,y_1)$$

$$\gamma(t) = (x(t), y(t))$$



Defina $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ por:

$$g(t) = f(\gamma(t)) = (f \circ \gamma)(t)$$

g é contínua, pois f e γ o são.

Além disso, de (I), temos que:

$$\underbrace{f(\overbrace{x_0, y_0}^{\gamma(a)})}_{= f(\gamma(a)) = g(a)} \leq \frac{1}{A} \cdot \iint_{\Omega} f(x,y) \cdot dA \leq \underbrace{f(\overbrace{x_1, y_1}^{\gamma(b)})}_{= f(\gamma(b)) = g(b)}$$

$$\Rightarrow \quad g(a) \leq \underbrace{\frac{1}{A}\cdot\iint_\Omega f(x,y)\,dA}_{d} \leq g(b),$$

com g contínua em $[a,b]$. Estamos, portanto, nas hipóteses do teorema do valor intermediário (T.V.I)$^{(*)}$. Então, $\exists\ c \in [a,b]$ tal que

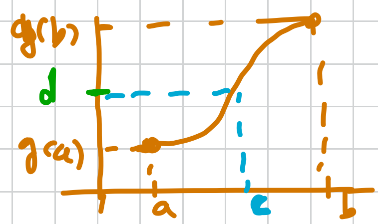
$$\underbrace{g(c)}_{\substack{\Vert\\ f(\gamma(c))}} = \frac{1}{A}\cdot\iint_\Omega f(x,y)\,dA\,;$$

$f(\gamma(c))$;

$$\gamma(c) = (\alpha,\beta) \in \Omega.$$

onde $\quad g(c) = f(\gamma(c)) = f(\alpha,\beta)\ ;\ (\alpha,\beta)\in\Omega.$ $\square$

(*) (T.V.I): $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ contínua e $d\in\mathbb{R}$ tal que $g(a)\leq d\leq g(b)$. Então, $\exists\ c\in[a,b]$ tal que $g(c)=d$.



Obs: O número $f(\alpha,\beta)$ chama-se VALOR MÉDIO.

EXEMPLO: Encontre o valor médio da função

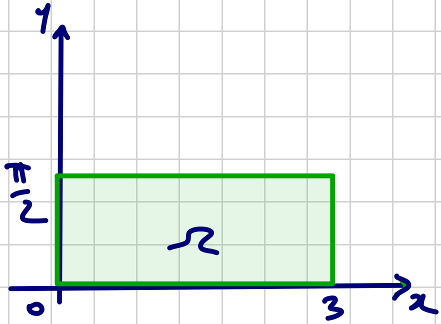
$f: [0,3]\times[0,\frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = x\cdot \operatorname{sen} y.$$

SOLUÇÃO: O valor médio é dado por:

$$f(\alpha,\beta) = \frac{1}{A}\cdot \iint_{\Omega} f(x,y)\,dA \quad , \quad \text{onde:}$$

$$\Omega = [0,3]\times[0,\tfrac{\pi}{2}]$$



A: área de Ω.

$$A = 3\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} \text{ u.a.}$$

Assim, teremos:

$$f(\alpha,\beta) = \frac{1}{A} \cdot \iint_{\Omega} f(x,y)\,dA$$

$$= \frac{1}{\frac{3\pi}{2}} \int_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}} \int_{x=0}^{x=3} x \cdot \operatorname{sen} y \; dx \, dy = \frac{2}{3\pi} \int_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} y \left(\int_{x=0}^{x=3} x \, dx \right) dy$$

$$= \frac{2}{3\pi} \cdot \int_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} y \cdot \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^3 dy = \frac{2}{3\pi} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} y \cdot \left(\frac{(3)^2}{2} - 0 \right) dy$$

$$= \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}\pi} \cdot \frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{\cancel{2}} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} y \, dy = \frac{3}{\pi} \cdot \left. (-\cos y) \right|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{3}{\pi} \cdot \left(-\underbrace{\cos \frac{\pi}{2}}_{0} + \underbrace{\cos 0}_{1} \right) = \frac{3}{\pi} \cdot 1 = \frac{3}{\pi}$$

RESOLUÇÃO DE EXERCÍCIOS DA LISTA 07.

1. Sejam $A \subset \mathbb{R}^m$ um bloco do $\mathbb{R}^m$, $f : A \to \mathbb{R}$ integrável, e sejam

$$m = \inf\{f(x) \,:\, x \in A\} \;\text{ e }\; M = \sup\{f(x) \,:\, x \in A\}.$$

Mostre que

$$m \leq \frac{\int_A f(x)dx}{\mathrm{Vol}(A)} \leq M.$$

Solução:

Note que, $\forall x \in A \subset \mathbb{R}^m$, tem-se que

$$m \leq f(x) \leq M.$$

Integrando sobre o bloco A, obtemos:

$$\int_A m\,dx \leq \int_A f(x)dx \leq \int_A M.dx$$

$$m \underbrace{\int_A dx}_{\mathrm{Vol}(A)} \leq \int_A f(x)dx \leq M. \underbrace{\int_A dx}_{\mathrm{Vol}(A)}$$

$$m.\mathrm{Vol}(A) \leq \int_A f(x)dx \leq M.\mathrm{Vol}(A)$$

$\div \mathrm{Vol}(A)$:

$$m \leq \frac{\int_A f(x)dx}{\text{Vol}(A)} \leq M.$$

2. Adicionando a hipótese no exercício anterior de que f é contínua no bloco A, conclua que existe $c \in A$ tal que[1]

$$\int_A f(x)dx = f(c) \cdot \text{Vol}A.$$

Como f é cont. no bloco A, e um bloco A é compacto, f assume valores máx. e mínimo em A. Sejam

$$f(x_0, y_0) = \min_A f \quad ; \quad f(x_1, y_1) = \max_A f.$$

Então, pelo exercício 01.

$$f(x_0, y_0) \leq \underbrace{\frac{\int_A f(x)dx}{\text{Vol}(A)}}_{d} \leq f(x_1, y_1),$$

com f contínua.

Então, pelo T.V.I; $\exists\ c \in A$ tal que

$$f(c) = \frac{\int_A f(x)dx}{\text{Vol}(A)}$$

$$\Rightarrow \int_A f(x)dx = f(c) \cdot \text{Vol}(A).$$

$\square$

3. Encontre um intervalo fechado que contenha o valor da integral dupla dada em cada caso (**Obs.:** use o exercício 1).

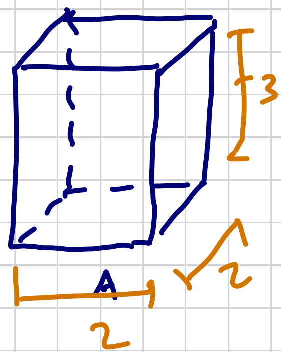
(a) $\iint_R (x^2+y^2)dA$, onde R é a região retangular com vértices em $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ e $(0,1)$.

(b) $\iint_R e^{xy}dA$, onde R é a região retangular com vértices em $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ e $(0,1)$.

(c) $\int_A (x+y)e^{yz}dxdydz$, onde A é o bloco $[1,3]\times[0,2]\times[1,4]$.

(c) $f(x,y,z) = (x+y)\cdot e^{yz}$.

$A = \underbrace{[1,3]}_{2}\times\underbrace{[0,2]}_{2}\times\underbrace{[1,4]}_{3}$



O bloco A é compacto, ou seja, limitado e fechado.

Então, $\exists\ m = \min_A f$; $\exists\ M = \max_A f$.

• O menor valor que $f(x,y,z) = (\underbrace{x}_{1}+\underbrace{y}_{0})\cdot e^{yz}$ assume será quando: $x=1$, $y=0$, $z=1$:

$$m = f(1,0,1) = (1+0)\cdot e^{0.1} = 1\cdot e^0 = 1$$

• O maior valor que $f(x,y,z) = (x+y)\cdot e^{yz}$ assume será quando: $x=3$, $y=2$ e $z=4$:

$$M = f(3,2,4) = (3+2)\cdot e^{2\cdot 4} = 5\cdot e^{8}$$

Então, pelo exercício 01:

$$m \leq \frac{\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{\text{Vol}(A)} \leq M$$

$$1 \leq \frac{\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{\text{Vol}(A)} \leq 5\cdot e^{8}.$$

onde $\text{Vol}(A) = 2\cdot 2\cdot 3 = \underline{\underline{12}}$

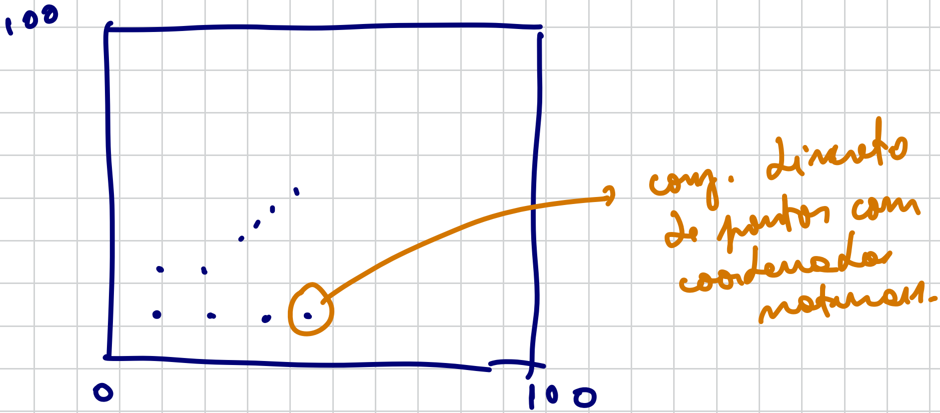
$$\Rightarrow \quad 1 \leq \frac{\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{12} \leq 5e^{8}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{12 \leq \iiint_A (x+y)\cdot e^{yz}\,dx\,dy\,dz \leq 60\cdot e^{8}}$$

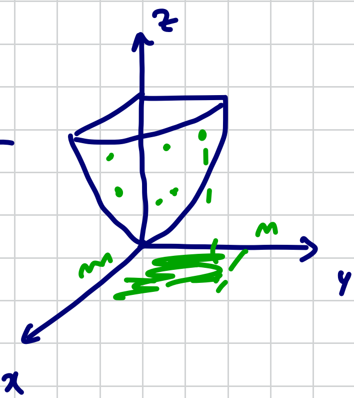
4. Sem efetuar cálculo algum, explique por quê a função $f : A = [0, 100] \times [0, 100] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2, \text{ se } (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ 0, \quad \text{caso contrário} \end{cases}$$

é integrável no bloco A. E qual seria o valor? Se substituirmos o bloco A por todo o $\mathbb{R}^2$, as conclusões acima mudariam? Justifique.



f é integrável em A, pois sendo D_f o conjunto de descontinuidade de f no bloco A possui medida zero.



Então, pelo T. de Lebesgue, f é integrável.

med$(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = 0$ em A.

O valor dessa integral será:

$$\int_A f = 0, \quad \text{pois } f \equiv 0,$$

salvo em pontos cuja coleção tem medida nula.

Substituindo A por $\mathbb{R}^2$, as conclusões acima não mudam, pois $med(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = 0$ em $\mathbb{R}^2$ (em $\mathbb{R}^2$ a medida de um conj. de pontos é zero)