CÁLCULO 3, TURMA T3

29/05/26 — AULA 26

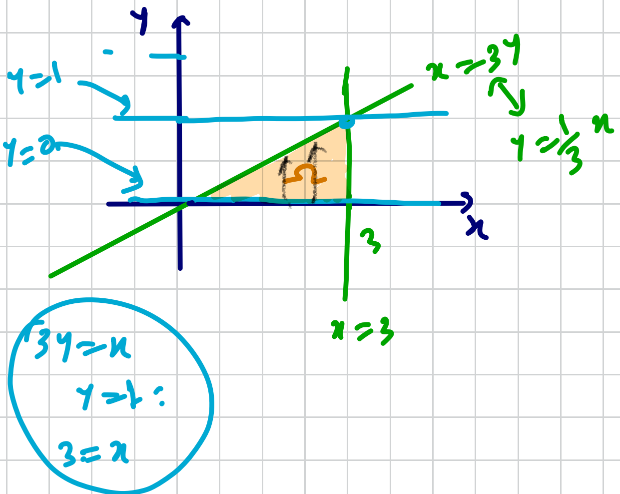
Seguindo nos exemplos:

06) Calcule $\displaystyle\int_0^1 \int_{3y}^{3} e^{x^2}\,dx\,dy$.

Note que a integral mais interna, $\int e^{x^2}dx$, não tem como ser calculada, razão na qual deveremos novamente trocar a ordem de integração.

Assim:

$$\int_{y=0}^{y=1} \int_{x=3y}^{x=3} e^{x^2}\,dx\,dy = \int_{x=0}^{x=3} \int_{y=0}^{y=\frac{1}{3}x} \underbrace{e^{x^2}}_{\text{CONSTANTE PARA } y} dy\,dx =$$



$$= \int_{x=0}^{x=3} e^{x^2} \left(\int_{y=0}^{y=\frac{1}{3}x} dy \right) dx =$$

$$= \int_{x=0}^{x=3} e^{x^2} \cdot y \Big|_{y=0}^{y=\frac{1}{3}x} dx =$$

$$= \int_{x=0}^{x=3} e^{x^2} \cdot \left(\frac{1}{3}x - 0\right) dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \int_0^3 \underbrace{e^{x^2} \cdot 2x\, dx}_{} =$$

$$\int e^u du = e^u + c$$

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2x\,dx$$

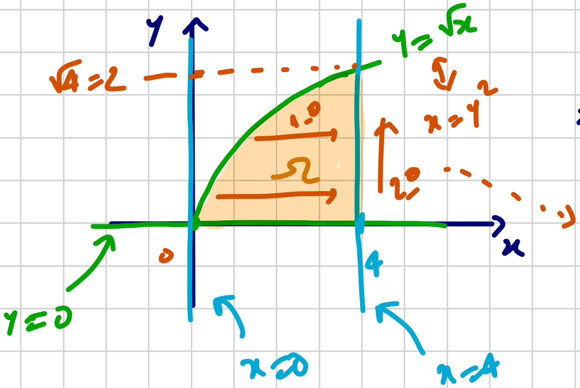
$$= \frac{1}{6} \cdot e^{x^2} \Big|_0^3 = \frac{1}{6}\left(e^{(3)^2} - e^0\right) = \frac{1}{6}\left(e^9 - 1\right)$$

---

07) Esboce a região de integração e faça a mudança de ordem de integração para

$$\int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\, dy\, dx .$$

SOLUÇÃO: Região de integração:

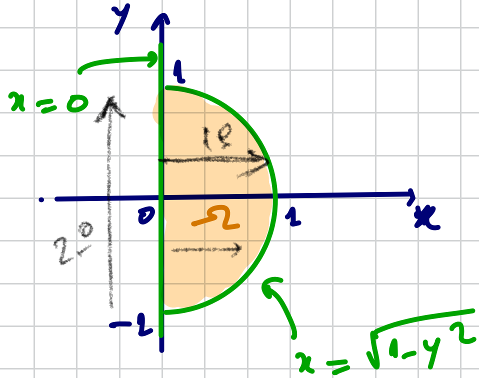


$$\int_{x=0}^{x=4} \int_{y=0}^{y=\sqrt{x}} f(x,y)\, dy\, dx =$$

$$= \int_{y=0}^{y=2} \int_{x=y^2}^{x=4} f(x,y)\, dx .$$

08) Calcule $\iint_{\Omega} x y^2 \, d_A$, onde Ω é a região limitada por $x=0$ e $x=\sqrt{1-y^2}$.

Solução: Primeiramente, desenhamos a região Ω:



$x = +\sqrt{1-y^2}$

$x^2 = 1-y^2$

$x^2+y^2=1.$

Assim, pela região Ω desenhada, temos:

$$\iint_{\Omega} x y^2 \, d_A = \int_{y=-1}^{y=1} \int_{x=0}^{x=\sqrt{1-y^2}} x y^2 \, dx \, dy =$$

$$= \int_{y=-1}^{y=1} y^2 \left(\int_{x=0}^{x=\sqrt{1-y^2}} x \, dx \right) dy = \int_{y=-1}^{y=1} y^2 \left. \frac{x^2}{2} \right|_{x=0}^{x=\sqrt{1-y^2}} dy =$$

$$= \int_{y=-1}^{y=1} y^2 \cdot \left[\frac{(\cancel{\sqrt{1-y^2}})^{\cancel{2}}}{2} - 0 \right] dy =$$

$$= \int_{y=-1}^{y=1} y^2 \frac{(1-y^2)}{2}\, dy = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (y^2 - y^4)\, dy =$$

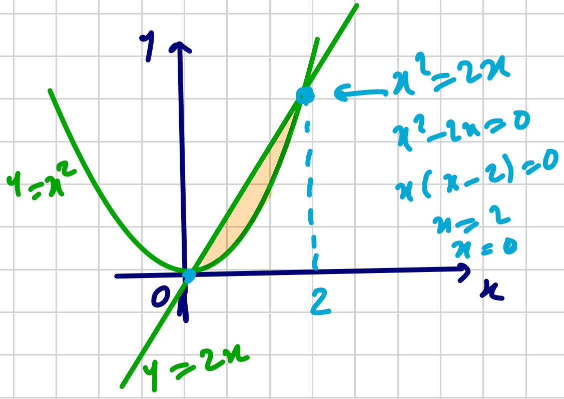
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^5}{5}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \left(\frac{-1}{3} - \frac{(-1)}{5}\right)\right]$$

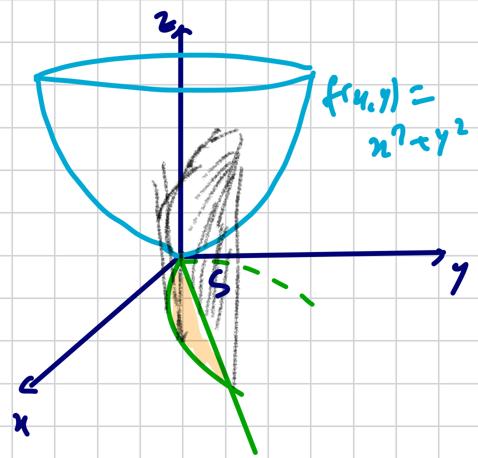
$$= \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3} - \frac{2}{5}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{10-6}{15}\right] = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{4}}{15} = \frac{2}{15}$$

09) Determine o volume do sólido que está abaixo do parabolóide $z = x^2 + y^2$ e acima da região Ω do plano xy limitada pela reta $y = 2x$ e pela parábola $y = x^2$.

Solução: Desenhando a região Ω do plano xy, teremos:





O volume V do sólido S será dado por:

$$V = \iint_{\Omega} f(x,y)\, dA = \int_{x=0}^{x=2} \int_{y=x^2}^{y=2x} (x^2+y^2)\, dy\, dx$$

$$= \int_{x=0}^{x=2} \left(x^2 y + \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{y=x^2}^{y=2x} dx =$$

$$= \int_{x=0}^{x=2} \left(x^2 \cdot 2x + \frac{(2x)^3}{3} - \left[x^2 \cdot x^2 + \frac{(x^2)^3}{3} \right] \right) dx =$$

$$= \int_0^2 \left(\underbrace{2x^3 + \frac{8x^3}{3}} - x^4 - \frac{x^6}{3} \right) dx$$

$$2 + \frac{8}{3} = \frac{6}{3} + \frac{8}{3} = \frac{14}{3}$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{14}{3}x^3 - x^4 - \frac{1}{3}x^6\right)dx = \left(\frac{14}{3}\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \frac{1}{3}\frac{x^7}{7}\right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= \frac{7}{6}(2)^4 - \frac{(2)^5}{5} - \frac{1}{21}(2)^7 - 0$$

$$= \frac{7}{\cancel{6}_{3}} \cdot \cancel{16}^{8} - \frac{32}{5} - \frac{128}{21} = \frac{56}{3} - \frac{32}{5} - \frac{128}{21} =$$

$$= \frac{1960 - 672 - 640}{105} = \frac{648}{105} = \frac{216}{35} \text{ u.v}$$

ÁREAS DE REGIÕES VIA INTEGRAIS DUPLAS:

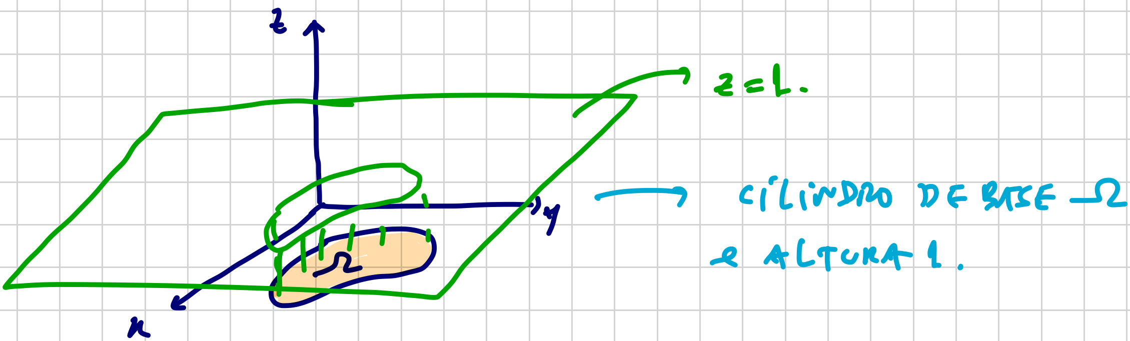
Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto J-mensurável. Então, a medida da área dessa região pode ser encontrada calculando:

$$A = \iint_{\Omega} dA = \iint_{\Omega} dy\,dx \quad \text{ou} \quad \iint_{\Omega} dx\,dy$$

De fato, considere $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por $f(x,y) = 1$.

Então, o volume do sólido S abaixo do gráfico de f e acima da região Ω será:

$$V = \iint_{\Omega} 1 . dA = \iint_{\Omega} dA$$



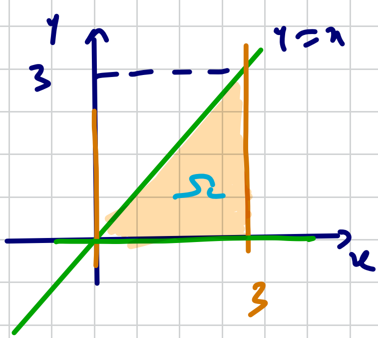
Da geometria do espaço o volume de um cilindro é dado por:

$$V = A_b \cdot h.$$

Como no nosso caso, $h = 1$, então, então a medida do volume é, <u>NUMERICAMENTE</u>, igual à medida da área.

<u>Ex.:</u> Obter a área da região Ω limitada por $y=0$, $y=x$, $x=0$ e $x=3$.

<u>Solução:</u>



Ω é a área de um triângulo.

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{3 \cdot 3}{2}$$

$$A = \frac{9}{2} \text{ u.a.}$$

Ou, por integrais duplas:

$$A = \iint_{\Omega} dA = \int_{x=0}^{x=3} \int_{y=0}^{y=x} dy\, dx =$$

$$= \int_{x=0}^{x=3} (y) \Big|_{y=0}^{y=x} dx = \int_{x=0}^{x=3} x \, dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^3 = \frac{9}{2} \text{ u.a.}$$

Este tipo de resolução torna-se interessante quando a região Ω é mais "trabalhosa".