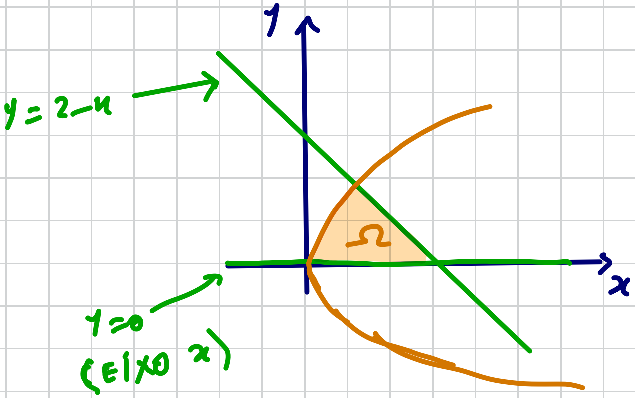
CÁLCULO 3, TURMA $T_3$

27/05/26 - AULA 25

Seguindo com os exemplos de cálculo de integrais duplas:

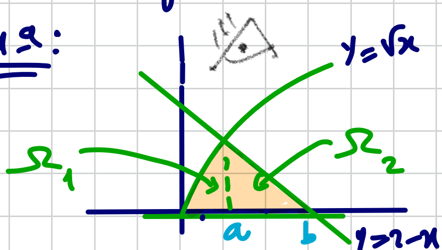
02) Calcule $\iint_{\Omega} x\sqrt{y}\,dx\,dy$, onde $\Omega$ é a região formada pelas retas $y=0$, $x+y=2$ e pela parábola $x=y^2$, no 1º quadrante.

SOLUÇÃO: A região $\Omega$ é dada por:




Neste caso o problema pode ser resolvido de duas formas:

1ª:



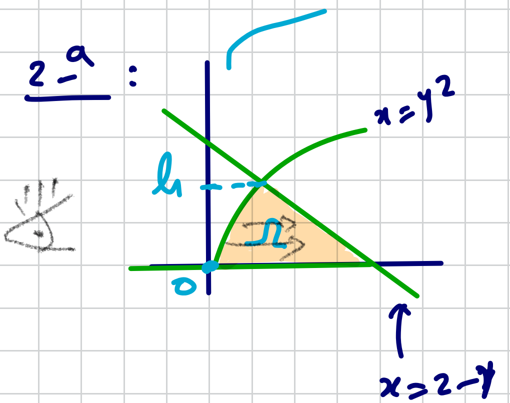

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} f = \int_{\Omega_1} f + \int_{\Omega_2} f$$

Ou seja:

$$\iint_{\Omega} f = \underbrace{\int_{x=0}^{x=a}\int_{y=0}^{y=\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\,dx}_{\Omega_1} + \underbrace{\int_{x=a}^{x=b}\int_{y=0}^{y=2-x} f(x,y)\,dy\,dx}_{\Omega_2}$$

2ª:




$$\int_{\Omega} f = \int_{y=0}^{y=h}\int_{x=y^2}^{x=2-y} f(x,y)\,dx\,dy$$

Como o 2º caso o cálculo reduz-se a apenas uma integral [olhando pelo eixo y], vamos resolver deste modo.

Primeiramente, devemos encontrar o valor de h destacado na ilustração. Para isso, resolvemos o sistema:

$$\begin{cases} x = y^2 \\ x = 2-y \end{cases} \Rightarrow \quad y^2 = 2-y$$

$$y^2 + y - 2 = 0$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$$

$$y = \frac{-1 \pm 3}{2} \to \boxed{y = 1}, \quad y = -2$$

$$\boxed{h = 1.}$$

Assim, teremos:

$$\int_\Omega f = \int_{y=0}^{y=1} \int_{x=y^2}^{x=2-y} f(x,y)\, dx\, dy =$$

$$= \int_{y=0}^{y=1} \int_{x=y^2}^{x=2-y} x \underbrace{\sqrt{y}} \, dx\, dy = \int_{y=0}^{y=1} \sqrt{y} \underbrace{\left( \int_{x=y^2}^{x=2-y} x\, dx \right)} dy =$$

CONSTANTE PARA $x$.

VAI RESULTAR EM UMA FUNÇÃO DE $y$ (em virtude dos limites de integração)

$$= \int_{y=0}^{y=1} \sqrt{y} \cdot \left. \frac{x^2}{2} \right|_{x=y^2}^{x=2-y} dy =$$

$$= \int_{y=0}^{y=1} \sqrt{y} \cdot \left[ \frac{(2-y)^2}{2} - \frac{(y^2)^2}{2} \right] dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 y^{\frac{1}{2}} \left[ 4 - 4y + y^2 - y^4 \right] dy =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 \left( 4 y^{1/2} - 4 \cdot y^{\frac{1}{2}+1} + y^{\frac{1}{2}+2} - y^{\frac{1}{2}+4} \right) dy =$$

$$= 2 \int_0^1 y^{1/2} dy - 2 \int_0^1 y^{3/2} dy + \frac{1}{2} \int_0^1 y^{5/2} dy - \frac{1}{2} \int_0^1 y^{9/2} dy$$

$$= 2 \cdot y^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{3} \Big|_0^1 - 2 \cdot y^{\frac{5}{2}} \cdot \frac{2}{5} \Big|_0^1 + \frac{1}{\cancel{2}} \cdot y^{\frac{7}{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{7} \Big|_0^1 - \frac{1}{\cancel{2}} y^{\frac{11}{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{11} \Big|_0^1$$

$$= \frac{4}{3} \cdot (1-0) - \frac{4}{5} (1-0) + \frac{1}{7} (1-0) - \frac{1}{11} (1-0) =$$

$$= \frac{4}{3} - \frac{4}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} = \frac{1540 - 924 + 165 - 105}{1155}$$

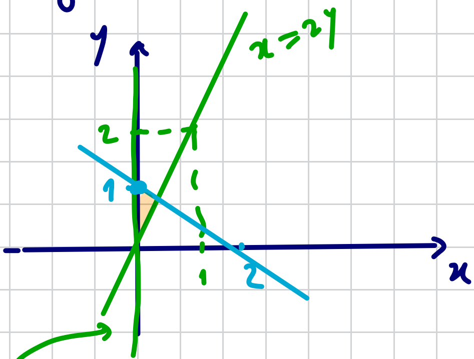
$$= \frac{676}{1155} \;//$$

03) Obtenha o volume do tetraedro limitado pelos planos $x+2y+z=2$, $x=2y$, $\underline{x=0}$ e $z=0$

(Resp.: $\frac{1}{3}$)

eixo y

<u>solução:</u> Região no $\mathbb{R}^2$:




$x+2y+z=2$
(eq. do plano no $\mathbb{R}^3$.)

$z=f(x,y)$

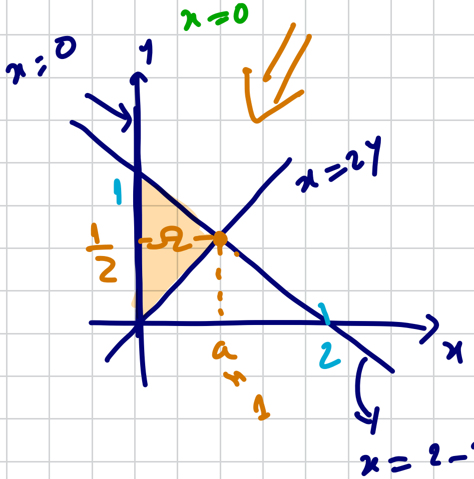
$$z = \underbrace{2-x-2y}_{f(x,y)}$$

traço no plano xy:

$z=0$.

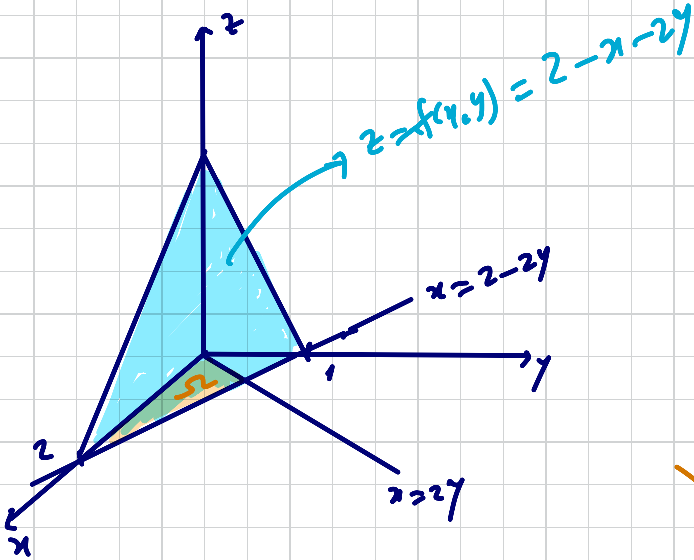
Neste caso, teremos a reta: $2-x-2y=0$

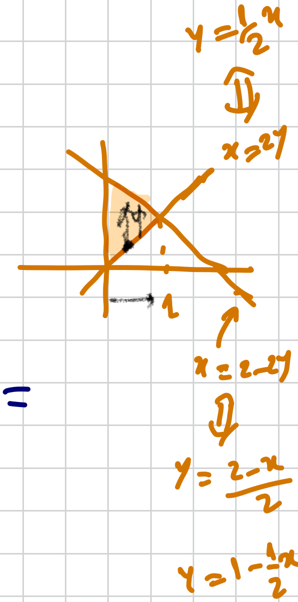
$\Rightarrow \quad x = 2-2y$




$$\left\{\begin{array}{l} x=2y \\ x=2-2y \end{array}\right. > 2y = 2-2y$$

$$\left.\begin{array}{l} 4y=2 \\ y=\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 2 \cdot y \\ x = 2\cdot\frac{1}{2} = 1 = a. \end{array}$$




$$V = \iint_{\Omega} f(x,y)\, dA = \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=\frac{1}{2}x}^{y=1-\frac{1}{2}x} f(x,y)\, dy\, dx =$$

$$= \int_{x=0}^{x=1} \left( \int_{y=\frac{1}{2}x}^{y=1-\frac{1}{2}x} (2 - x - 2y)\, dy \right) dx =$$

$$= \int_{x=0}^{x=1} \left(2y - xy - y^2\right) \Big|_{y=\frac{1}{2}x}^{y=1-\frac{1}{2}x} dx =$$

$$= \int_{x=0}^{x=1} 2\left(1-\frac{1}{2}x\right) - x\left(1-\frac{1}{2}x\right) - \left(1-\frac{1}{2}x\right)^2 - \left[ \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}}x - x \cdot \frac{1}{2}x - \left(\frac{1}{2}x\right)^2 \right] dx$$

$$= \int_0^1 2 - x - \cancel{x} + \frac{x^2}{2} - 1 + \cancel{x} - \frac{x^2}{4} - \left[ x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4} \right] dx =$$

$$= \int_0^1 \left( 1 - x + \frac{x^2}{2} - \cancel{\frac{x^2}{4}} - x + \frac{x^2}{2} + \cancel{\frac{x^2}{4}} \right) dx$$

$$= \int_0^1 ( 1 - 2x + x^2 ) dx = \left( x - x^2 + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 =$$

$$= 1 - (1)^2 + \frac{(1)^3}{3} - ( 0 - 0 + 0 ) = \cancel{1} - \cancel{1} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

**Resp.:** $\frac{1}{3}$ . u.v. (unidades de volume)

04) Calcule $\displaystyle\int_0^1\int_x^1 \operatorname{sen} y^2\,\underbrace{dy}_{1º}\,\underbrace{dx}_{2º}$.

<u>solução</u>: $$\int_{x=0}^{x=1}\int_{y=x}^{y=1} \operatorname{sen} y^2\,dy\,dx = ?$$

Porém, note que não existe técnica para calcular

$$\int \operatorname{sen} y^2\,dy.$$

$\int \operatorname{sen} u\,du$

$u = y^2$

$du = 2y\,dy$

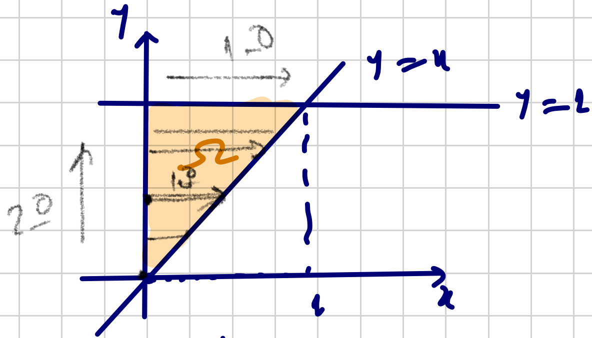
FALTA...

Quando isto acontece (ou seja, uma integral não pode ser calculada), a saída é trocar a ordem de integração das variáveis.

Neste caso, precisamos ajustar os limites de integração para preservar a mesma região $\Omega$ de integração.

Vamos, então, desenhar a região $\Omega$, c.f. o enunciado:

$$\int_{x=0}^{x=1}\int_{y=x}^{y=1} \operatorname{sen} y^2\,dy\,dx$$




$$\int_{x=0}^{x=1}\int_{y=x}^{y=1} \operatorname{sen} y^2\,dy\,dx = \int_{y=0}^{y=1}\int_{x=0}^{x=y} \underbrace{\operatorname{sen} y^2}_{\text{CONSTANTE p/ } x.}\cdot dx\,dy$$

$$= \int_{y=0}^{y=1} \operatorname{sen} y^2 \left(\int_{x=0}^{x=y} dx\right) dy = \int_{y=0}^{y=1} \operatorname{sen} y^2 \cdot x\Big|_{x=0}^{x=y} dy =$$

$$= \int_{y=0}^{y=1}\operatorname{sen} y^2 \cdot (y-0)\,dy = \frac{1}{2}\int_{0}^{1} \operatorname{sen} y^2\cdot(2y\,dy) =$$

$$\frac{1}{2}\int \operatorname{sen} y^2\,(2\cdot y\,dy)$$

$$u = y^2 \Rightarrow du = 2y\,dy$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot\left(-\cos y^2\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\cdot\left(-\cos 1 - (-\cos 0)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\cos 1 + 1\right) = \frac{1-\cos 1}{2} \;//$$

---

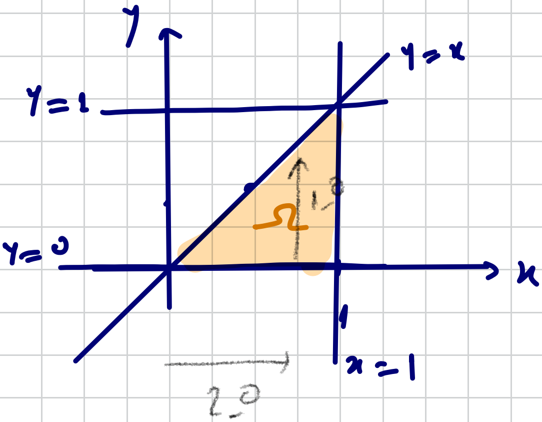
05) Calcule $\displaystyle\int_0^1\int_y^1 \sqrt{1+x^2}\,dx\,dy$.

Solução: Note, neste caso, que até temos como calcular a integral indefinida

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx ,$$

efetuando uma substituição trigonométrica, mas será muito trabalhoso. Vamos, então, alterar a ordem de integração (como no exemplo anterior) para verificar se o problema não fica mais simples.

$$\int_{y=0}^{y=1}\int_{x=y}^{x=1}\sqrt{1+x^2}\,dx\,dy = \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=x}\underbrace{\sqrt{1+x^2}}_{\text{CONSTANTE PARA } y}\,dy\,dx \;=$$




$$= \int_{x=0}^{x=1}\sqrt{1+x^2}\left(\int_{y=0}^{y=x} dy\right)dx = \int_{x=0}^{x=1}\sqrt{1+x^2}\cdot y\Big|_{y=0}^{y=x}\,dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\cdot x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (1+x^2)^{1/2}(2x\,dx) =$$

$\int u^k\,du \Rightarrow u = 1+x^2$

$du = 2x\,dx$

$$= \frac{1}{\cancel{2}}\,\frac{(1+x^2)^{3/2}}{\frac{3}{\cancel{2}}}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}\,(1+x^2)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}(1+1)-\frac{1}{3}(1+0)$$

$$\frac{2}{3}-\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$