CÁLCULO 3, TURMA T3. 25/05/26 - AULA 24

INTEGRAIS DUPLAS:

No que segue, focaremos nosso estudo para integrais de funções $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, onde Ω é um conjunto limitado e J-mensurável; razão pela qual vamos omitir essa denominação, observando que, se mais adiante tratarmos algum resultado onde o conjunto não seja J-mensurável, isso será dito.

Queremos calcular, então

$$\int_{\Omega} f = \iint_{\Omega} f(x,y) \cdot d_A$$ onde

d_A é chamado de ELEMENTO DE ÁREA, podendo ser $dxdy$ ou $dydx$.

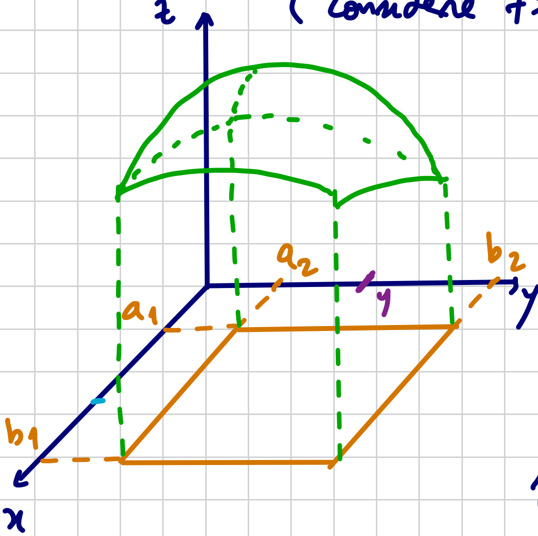
Dependendo da região Ω, podemos separar em dois casos:

CASO 1: Ω é um retângulo (bloco) da forma

$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$.

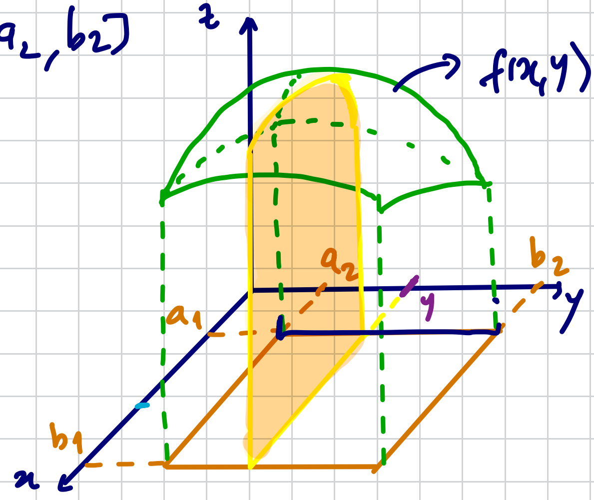
Seja $f: \Omega = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ integrável.

(considere $f \geq 0$, para dar sentido de volume)



Tome $y \in [a_2, b_2]$ um ponto qualquer.

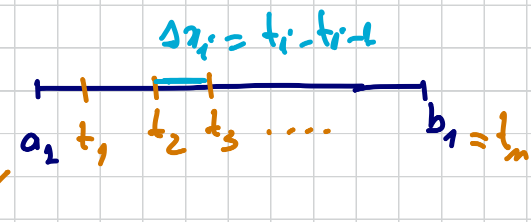
Considere a "lâmina" determinada pelo corte por um plano paralelo ao plano xz, abaixo da superfície $z = f(x, y)$, passando por $y \in [a_2, b_2]$

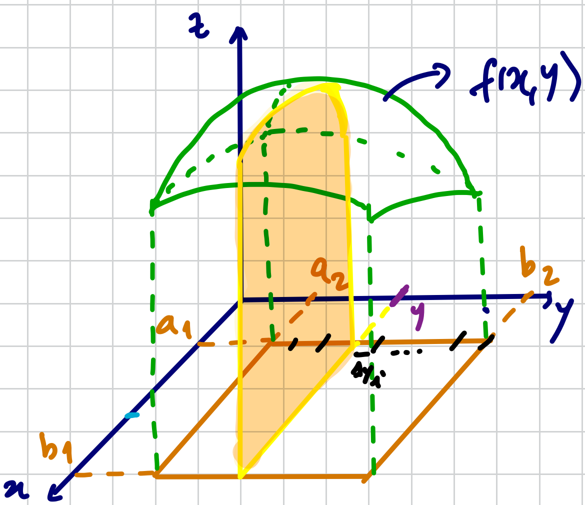


Fixado, temporariamente, o y, $f(x,y)$ será pensada como uma função de x. Assim, a área da lâmina acima destacada será dada por:

$$A(y) = \int_{a_1}^{b_1} f(x,y)\,dx$$

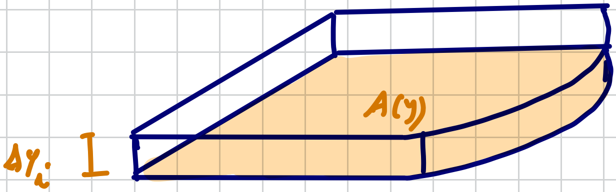
Tome agora uma partição do intervalo $[a_2, b_2]$
$P = \{ a_2 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b_2 \}$; então
$\Delta y_i = t_i - t_{i-1}$.





Considere o sólido de base $A(y)$ e altura

Δy_i



O volume dessa fatia será $\tilde{V} = A(y)\cdot\Delta y_i$

$$\tilde{V} = A(y)\cdot\Delta y_i = \left(\int_{a_2}^{b_1} f(x,y)\,dx\right)\cdot\Delta y_i$$

O volume V do sólido abaixo do gráfico de f no retângulo $[a_1, b_1]\times[a_2, b_2]$ será dado por:

$$V = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\tilde{V} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\left(\int_{a_2}^{b_1} f(x,y)\,dx\right)}_{A(y)}\Delta y_i ,$$

que é uma soma de Riemann, ou seja, obtemos:

$$V = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} A(y)\,\Delta y_i = \int_{a_2}^{b_2} A(y)\,.dy =$$

$$= \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x,y)\,dx \right) dy \,,$$

chamada de integral iterada.

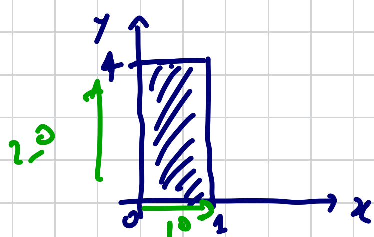
Se trocarmos a ordem para dydx o resultado continuaria o mesmo, só mudaria a ORDEM DA INTEGRAÇÃO:

$$V = \underbrace{\int_{a_2}^{b_2} \underbrace{\int_{a_1}^{b_1} f(x,y)\,dx}_{1^{\underline{o}}\text{: INTEGRA EM } x.}\,dy}_{2^{\underline{o}}\text{ INTEGRA EM } y} = \underbrace{\int_{a_1}^{b_1} \underbrace{\int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\,dy}_{\text{INTEGRA } 1^{\underline{o}} \text{ EM } y}\,dx}_{\text{DEPOIS, INTEGRA EM } x}$$

Vejamos alguns exemplos:

01) A integral feita por definição (aula 22)

$$\int_{\Omega} (2x+4y)\,dx\,dy \quad ; \quad \Omega = [0,1]\times[0,4]$$



SOLUÇÃO:

$$\int_{\Omega} (2x+4y)\,dx\,dy = \int_{y=0}^{y=4}\Big(\underbrace{\int_{x=0}^{x=1} (2x+4y)\,dx}_{\text{INTEGRA EM } x}\Big)\,dy =$$

$$= \int_{y=0}^{y=4} (x^2+4xy)\Big|_{x=0}^{x=1} dy = \int_{y=0}^{y=4} \big(1+4y-(0+0)\big)\,dy$$

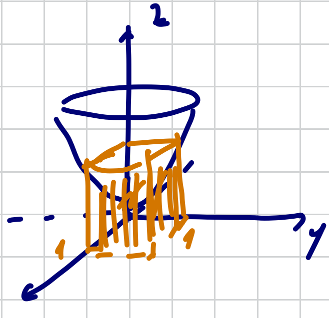
$$= \int_{0}^{4} (1+4y)\,dy = \left(y+2y^2\right)\Big|_{0}^{4} = 4+2(4)^2-0$$

$$= 4+32 = \underline{\underline{36}}$$

---

02) Calcule $\iint_{\Omega} (x^2+y^2)\,dA$ onde

$\Omega = [0,1]\times[0,1]$.



SOLUÇÃO:

$$\int_{y=0}^{y=1}\left(\int_{x=0}^{x=1}(x^2+y^2)\,dx\right)dy = \int_{y=0}^{y=1}\left(\frac{x^3}{3}+y^2x\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1} dy =$$

$$= \int_{y=0}^{y=1}\left(\frac{1}{3}+y^2-0\right)dy = \int_0^1\left(\frac{1}{3}+y^2\right)dy =$$

$$=\left(\frac{1}{3}y+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}+\frac{1}{3}-0-0=\frac{2}{3}$$

---

03) $\int_\Omega \operatorname{sen}(x+y)\,dx\,dy$; onde $\Omega = \underbrace{[0,\frac{\pi}{2}]}_{x}\times\underbrace{[0,\pi]}_{y}$.

solução:

$$\int_\Omega \operatorname{sen}(x+y)\,dx\,dy = \int_{y=0}^{y=\pi}\left(\int_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(x+y)\,dx\right)dy =$$

$u = x+y \Rightarrow du = dx$

$$= \int_{y=0}^{y=\pi} -\cos(x+y)\Bigg|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} dy =$$

$$= \int_{y=0}^{y=\pi} \left[-\cos\left(\frac{\pi}{2}+y\right) - \left(-\cos(0+y)\right)\right] dy =$$

$$= \int_0^{\pi} \left(-\cos\left(\frac{\pi}{2}+y\right) + \cos y\right) dy =$$

$$-\int_0^{\pi} \cos\left(\underbrace{y+\frac{\pi}{2}}\right) dy + \int_0^{\pi} \cos y \, dy$$

$y+\frac{\pi}{2} \to du = dy$

$$= -\operatorname{sen}\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\Big|_0^{\pi} + \operatorname{sen} y \Big|_0^{\pi} =$$

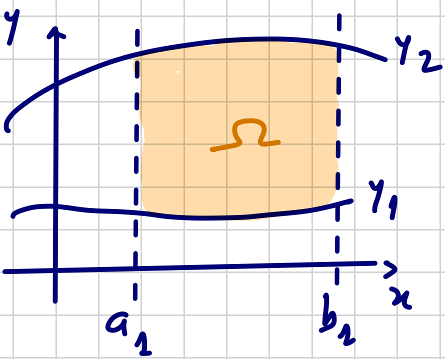
$$= -\operatorname{sen}\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right) - \left(-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) + \operatorname{sen}\pi - \operatorname{sen} 0 =$$

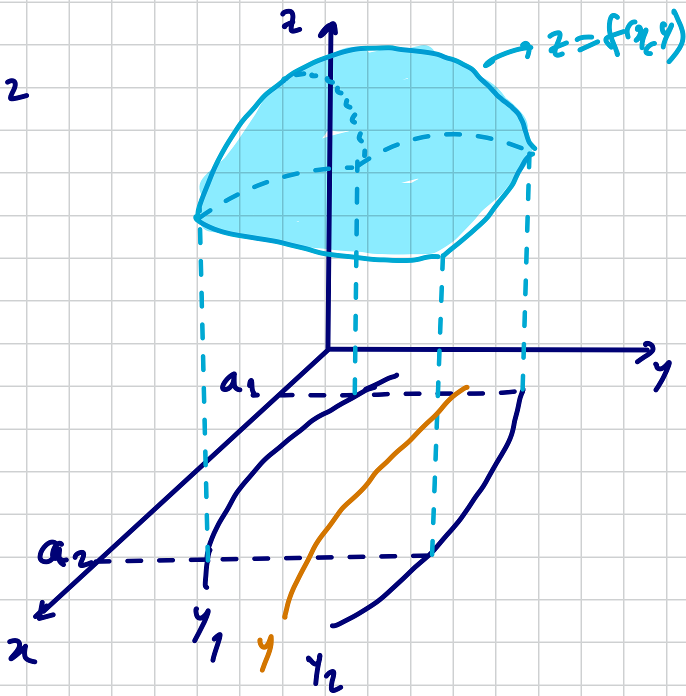
$$= -\underbrace{\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}}_{= -1} + \underbrace{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}}_{= 1} + \underbrace{\operatorname{sen}\pi}_{= 0} - \underbrace{\operatorname{sen} 0}_{= 0} =$$

$$= -(-1) + 1 + 0 + 0 = 2$$

CASO 2: a região Ω é delimitada por pelo menos uma curva.

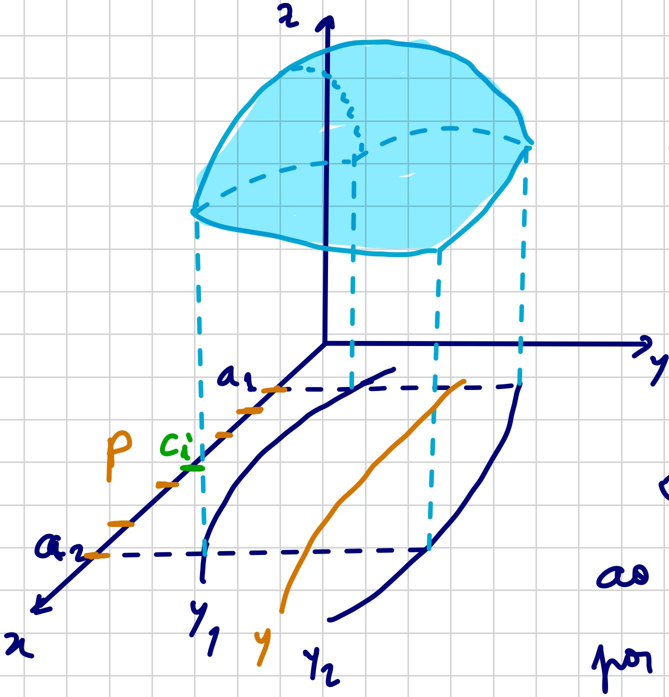
Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ função integrável e considere Ω delimitado pelas curvas γ_1 e γ_2, no intervalo $[a_1, b_1]$, conforme o esquema:





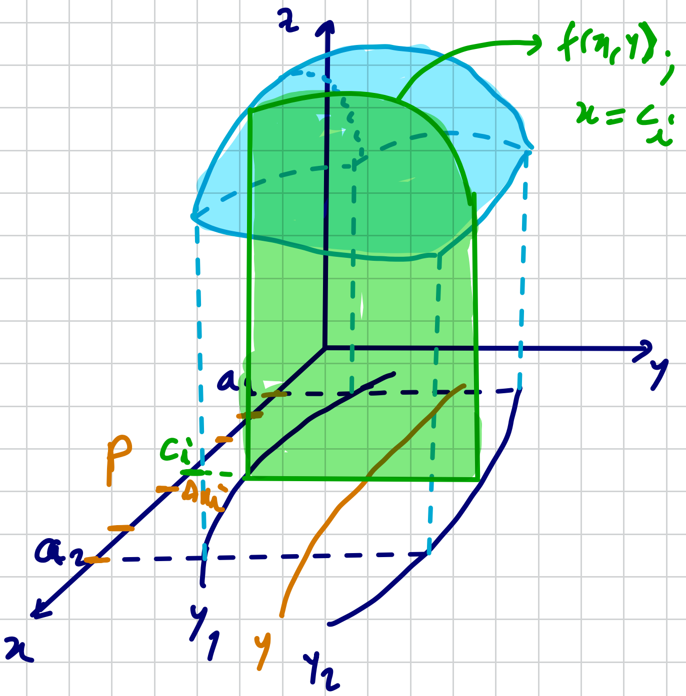
Seja γ uma curva entre γ_1 e γ_2.

Seja $P = \{a_1 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b_1\}$ uma partição do intervalo $[a_1, b_1]$, determinando subintervalos $[t_{i-1}, t_i]$ de comprimento $\Delta x_i = t_i - t_{i-1}$.



Seja c_i um ponto qualquer no subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$

Seja o plano paralelo ao plano yz, passando por c_i, que determina uma "lâmina" abaixo de $f(x,y)$, c.f. a ilustração abaixo.



A área dessa lâmina será dada por

$$A(c_i) = \int_{y_1}^{y_2} f(c_i, y)\, dy$$

Tomando o sólido $\tilde{V}$ de base $A(c_i)$ e altura Δx_i; a medida do seu volume será:

$$\tilde{V} = A(c_i).\Delta x_i$$

Então, o volume V do sólido S será dado por:

$$V = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \tilde{V} = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} A(c_i)\Delta x_i =$$

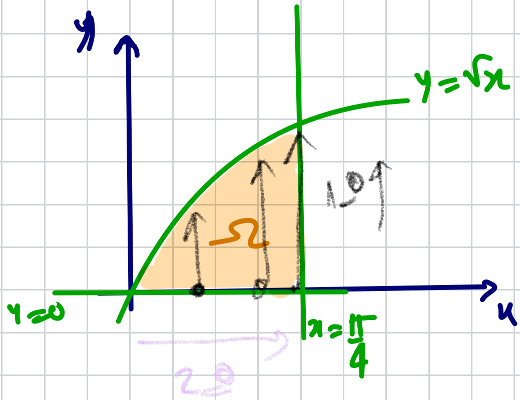
$$= \int_{a_1}^{a_2} A(c_i).dx = \int_{x=a_1}^{x=a_2} \left(\int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\, dy \right) dx$$

UMA INTEGRAL ITERADA, <u>MAS</u>
OS LIMITES DE INTEGRAÇÃO INTERNOS
SÃO FUNÇÕES, E OS EXTERNOS CONSTANTES.

Ex-:

01) Calcule $\iint_{\Omega} \sqrt{x}\,.\cos(y\sqrt{x})\,dx\,dy$, onde Ω é formado pelas retas $y=0$, $x=\frac{\pi}{4}$ e pela curva $y=\sqrt{x}$.

Solução:



$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,dA = \int_{x=0}^{x=\frac{\pi}{4}}\left(\int_{y=0}^{y=\sqrt{x}} \sqrt{x}\,.\cos(y\sqrt{x})\,dy\right)dx$$

CONSTANTE PARA y

$$= \int_{x=0}^{x=\frac{\pi}{4}} \sqrt{x}\left(\int_{y=0}^{y=\sqrt{x}} \cos(y\sqrt{x})\,dy\right)dx =$$

$\int \cos u\,du \qquad u = y\sqrt{x}$

$du = \sqrt{x}\,dy$

$$= \int_{x=0}^{x=\frac{\pi}{4}} \int_{y=0}^{y=\sqrt{x}} \cos(\underbrace{y\sqrt{x}}_{v}) \cdot (\underbrace{\sqrt{x}\, dy}_{dv})\, dx$$

$$= \int_{x=0}^{x=\frac{\pi}{4}} \left(\operatorname{sen} y\sqrt{x} \right) \Big|_{y=0}^{y=\sqrt{x}} dx =$$

$$= \int_{x=0}^{x=\frac{\pi}{4}} \left(\operatorname{sen} \sqrt{x}\cdot\sqrt{x} - \underbrace{\operatorname{sen} 0}_{0} \right) dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen} x \, dx =$$

$$= -\cos x \Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}} = -\cos\frac{\pi}{4} - (-\cos 0) =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = \frac{-\sqrt{2}+2}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \,//$$