Encerramos a aula passada com o TEOREMA DE LEBESGUE:

$$f : A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \text{ é integrável no bloco } A \subset \mathbb{R}^m$$

$$\Updownarrow \text{ T. Lebesgue.}$$

o conj. D_f dos seus pontos de descontinuidade tiver medida nula, i.e., $med(D_f) = 0$.

CONJUNTOS J-MENSURÁVEIS (MENSURÁVEIS SEGUNDO JORDAN)

Vamos definir este importante conceito. Antes, porém, apresentamos o conceito de função característica.

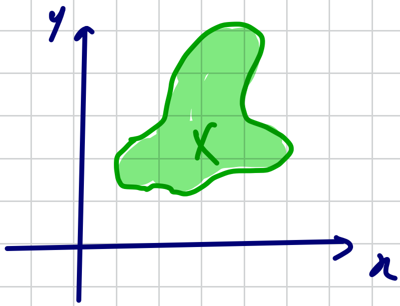
Def.: Seja $X \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto qualquer.

Definimos a função característica de X em $\mathbb{R}^m$ por: $\xi_X : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$;

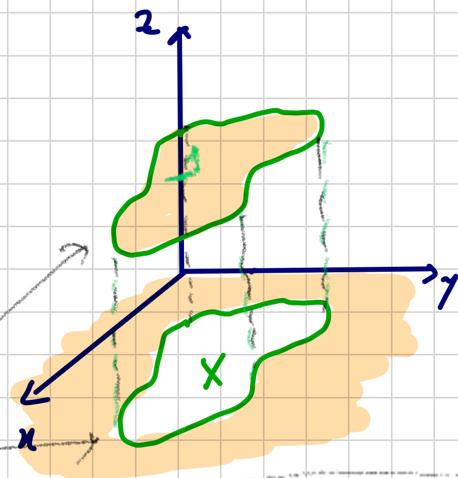
$$\xi_X(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in X \\ 0, & \text{se } x \notin X. \end{cases}$$

__FATO IMPORTANTE:__ os pontos onde a função característica é descontínua correspondem à fronteira de X, i.e; ∂X.

__Ex:__ em $\mathbb{R}^2$:



$\xi_X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$



"SALTO" DE 1 PARA ZERO, DEPENDENDO SE $x \in X$ OU $x \notin X$.

(LOGO, PERDE CONTINUIDADE NA ∂X.)

__Def:__ Dizemos que um conjunto $X \subset \mathbb{R}^m$ é __mensurável segundo Jordan__ ou __J-mensurável__ se a função característica $\xi_X : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ for integrável.

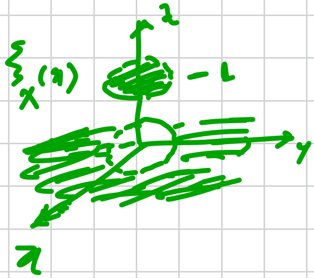
Neste caso, o volume $\mathrm{vol}(X)$ é definido por

$$\mathrm{vol}(X) = \int_{\mathbb{R}^m} \xi_X(x)\,dx$$

Ex.: $\mathbb{R}^2$. $X = B_R(0)$; $R > 0$.

Então,

$$\mathrm{vol}(X) = \int_{\mathbb{R}^2} \xi_{B_R(0)}(x)\,dx = \int_{B_R(0)} \overbrace{\xi_X(x)}^{1}\,dx + \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \{B_R(0)\}} \overbrace{\xi_X(x)}^{=0}\,dx$$



$$= \int_{B_R(0)} 1\,dx + 0 = \int_{B_R(0)} dx = \text{área} = \pi R^2$$

CONTRA-EXEMPLO: $X = ([0,1]\cap \mathbb{I}) \times ([0,1]\cap \mathbb{I})$

X é o quadrado $[0,1]\times[0,1]$ contendo todos os pontos (a,b), com $a,b\in \mathbb{I}$ (irracionais)

X é $\mathcal{J}$-mensurável?

Não é pois a função característica ξ_X não é integrável. Mas isto é difícil de ver. Torna-se mais fácil com o seguinte resultado:

PROPOSIÇÃO: Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^m$ é $\mathcal{J}$-mensurável se, e somente se, $\text{med}(\partial X) = 0$.

DEMONSTR.: De fato, basta observar as implicações:

X é $\mathcal{J}$-mensurável $\overset{\text{def.}}{\iff}$ ξ_X for integrável.

$\Updownarrow$ t. de Lebesgue

o conj. D_{ξ_X} de pontos de descontinuidade de ξ_X tiver medida nula, i.e.;

$$\text{med}\,(D_{\xi_X}) = 0.$$

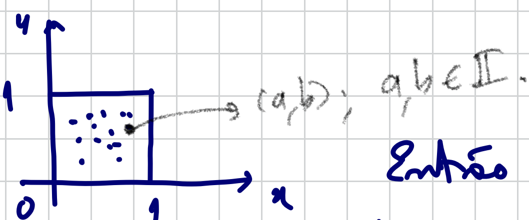
$\Updownarrow$ FATO anteriormente explicado

$$D_{\xi_X} = \partial X \quad \text{, i.e.;}$$

$$\text{med}\,(\partial X) = 0.$$

$\square$

Assim, voltando ao CONTRA-EXEMPLO; temos que: $X = ([0,1] \cap \mathbb{I}) \times ([0,1] \cap \mathbb{I})$ é o quadrado $[0,1] \times [0,1]$ com coordenadas irracionais.



Então, dado $\alpha(a,b) \in X$; $\forall \delta > 0$, $B_\delta(\alpha) \not\subset X$, pois pela densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$, não existir dentro de $B_\delta(\alpha)$ pontos com alguma coordenada racional, fazendo com que a bola $B_\delta(\alpha)$ não fique no $\text{int}(X)$.

Conclusão: $\text{int}(X) = \emptyset$. Portanto, todo ponto de X pertence à fronteira; ou seja;

$$\partial X = X.$$

Disso, $\text{med}(\partial X) = \text{med}(X) = \text{área} =$

$$= 1 \times 1 = 1 \neq 0;$$

$$\Rightarrow \text{med}(\partial X) \neq 0$$

Logo, X não é J-mensurável.

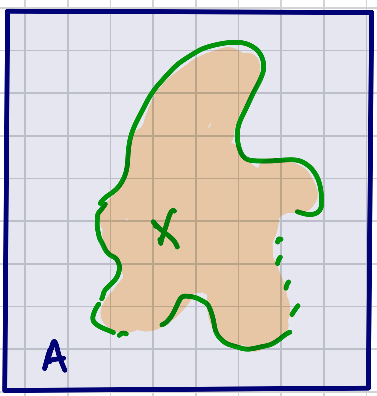
No que segue, vamos apresentar o conceito de integral em conjunto $X \subset \mathbb{R}^m$ mais gerais do que um bloco $A \subset \mathbb{R}^m$.

Seja $f : X \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função limitada em um conjunto J-mensurável $X \subset \mathbb{R}^m$, X limitado.

Então, existe um bloco $A \subset \mathbb{R}^m$ tal que $X \subset A$. Dessa forma, defina a extensão $\tilde{f}$ de f no bloco A por:

$$\tilde{f} : A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in X \\ 0, & \text{se } x \in A \setminus X. \end{cases}$$



Ou seja,

$$\tilde{f}(x) = f(x) \cdot \xi_X(x)$$

$X \subset A$.

Assim, temos que:

$$\int_A \tilde{f} = \int_A f \cdot \xi_X = \int_X f \cdot \overbrace{\xi_X}^{=1} + \int_{A \setminus X} f \cdot \overbrace{\xi_X}^{=0} = \int_X f$$

conclusão:

$$\int_A \tilde{f} = \int_X f.$$

Ou seja a integral de uma função em um conjunto J-mensurável X corresponde à integral da extensão $\tilde{f}$ da f num bloco A contendo o conj. X, tal que, fora de X, a extensão é nula.

PROPOSIÇÃO: Sejam $f, g : X \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ funções integráveis em um conjunto J-mensurável X, e $c \in \mathbb{R}$. Então, valem as propriedades:

01) $f+g$ é integrável, e

$$\int_X (f+g) = \int_X f + \int_X g .$$

02) $c \cdot f$ é integrável, e

$$\int_X c \cdot f = c \cdot \int_X f .$$

03) se $f \geq 0$, então $\int_X f \geq 0$. Além disso,

se $f \geq g$, então $\int_X f \geq \int_X g$.

04) se $X = A \dot{\cup} B$ (união disjunta), então

$$\int_X f = \int_A f + \int_B f .$$

TEOREMA: ("UPGRADE" DO TEOREMA DE LEBESGUE)

Seja $f : X \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função definida em um conjunto $\mathcal{J}$-mensurável X. Então, f é integrável se, e somente se, a medida do conjunto D_f dos pontos de descontinuidade de f, tiver medida nula.

DEMONSTR.: Seja $f : X \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ com X J-mensurável. Seja $A \subset \mathbb{R}^m$ um bloco tal que $X \subset A$. Defina $\tilde{f} : A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ a extensão do de f no bloco A.

Então, os pontos de descontinuidade de f serão os pontos de descontinuidade de $\tilde{f}$; ou seja,

$$D_f \subset D_{\tilde{f}}.$$

Além disso, a extensão $\tilde{f}$ tem, além dos pontos de descontinuidade de f, os pontos da fronteira de X como descontinuidade, ou seja,

$$D_f \subset D_{\tilde{f}} \subset D_f \,\dot{\cup}\, (\partial X).$$

Então,

$$\text{med}(D_f) \leq \text{med}(D_{\tilde{f}}) \leq \text{med}(D_f) + \text{med}(\partial X)$$

Como X é mensurável segundo Jordan, temos que $\text{med}(\partial X) = 0$ (c.f. prop. anterior)

Assim, temos:

$$\text{med}(D_f) \leq \text{med}(D_{\tilde{f}}) \leq \text{med}(D_f) + 0$$

ou seja $\quad \text{med}(D_f) = \text{med}(D_{\tilde{f}}) \qquad (*)$

Disso, tem-se que:

$$\exists \int_X f = \int_A \tilde{f} \underset{\substack{\text{t. de} \\ \text{Lebesgue} \\ \text{clássico}}}{\Longleftrightarrow} \text{med}(D_{\tilde{f}}) = 0 \underset{(*)}{\Longleftrightarrow} \text{med}(D_f) = 0$$

$\square$

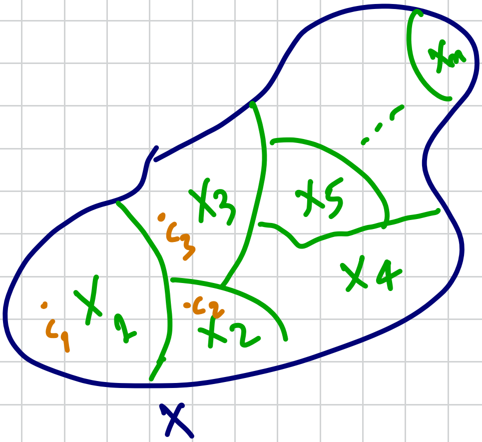
INTEGRAL DE RIEMANN:

Seja $f: X \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função limitada em um conjunto J-mensurável X. Seja $D = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ uma decomposição do conjunto X, ou seja,

$$X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n,$$

cada X_i é J-mensurável; e

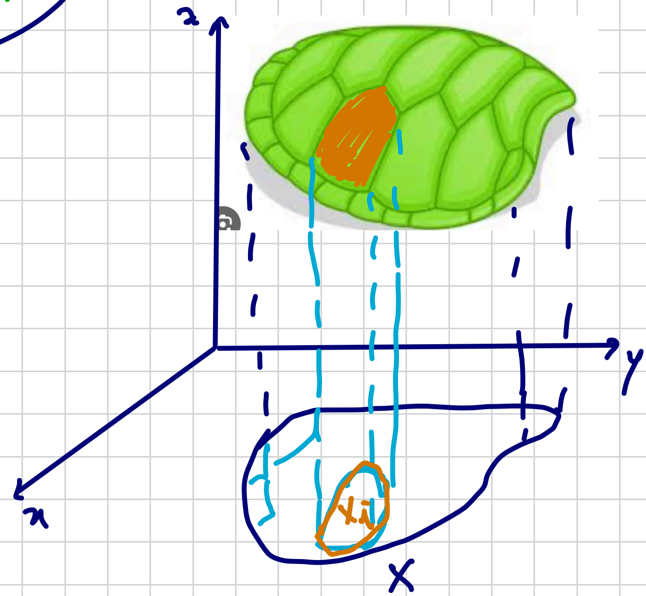
$int(X_i) \cap int(X_j) = \emptyset$ se $i \neq j$.



Ex.: $f: X \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

lembra um

"casco de tartaruga"

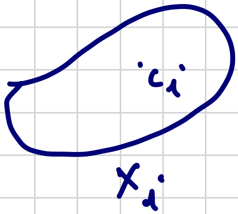


A soma inferior e superior de f em relação a esta decomposição será, respectivamente:

$$s(f, D) = \sum_{i=1}^{m} m_i \cdot Vol(X_i) ,$$

$$S(f; D) = \sum_{i=1}^{m} M_i \cdot Vol(X_i) , \quad \text{onde}$$

$$m_i = \inf_{x \in X_i} f(x) \quad \text{e} \quad M_i = \sup_{x \in X_i} f(x)$$



Seja $c_i \in X_i$ um ponto qualquer. Então,

$$m_i \leq f(c_i) \leq M_i \,, \quad (*)$$

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}.$$

Define a decomposição pontilhada D^* por:

$$D^*(f; D) = \sum_{i=1}^{m} f(c_i) \cdot Vol(X_i)$$

Assim; de $(*)$, multiplicando por $Vol(X_i)$, em cada i, vem:

$$m_i \cdot Vol(X_i) \leq f(c_i) \cdot Vol(X_i) \leq M_i \cdot Vol(X_i)$$

Somando sobre todos os índices:

$$\sum_{i=1}^{m} m_i \cdot Vol(X_i) \leq \sum_{i=1}^{m} f(c_i) \cdot Vol(X_i) \leq \sum_{i=1}^{m} M_i \cdot Vol(X_i)$$

Ou seja;

$$s(f;D) \leq D^*(f;D) \leq S(f;D)$$

Isto constitui um esquema para a prova do seguinte resultado:

<u>TEOREMA</u>: Uma função $f: X \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ limitada e num conj. J-mensurável X é integrável,

e

$$\int_X f = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i).\, Vol(X_i) .$$