CÁLCULO 3, TURMA T2:

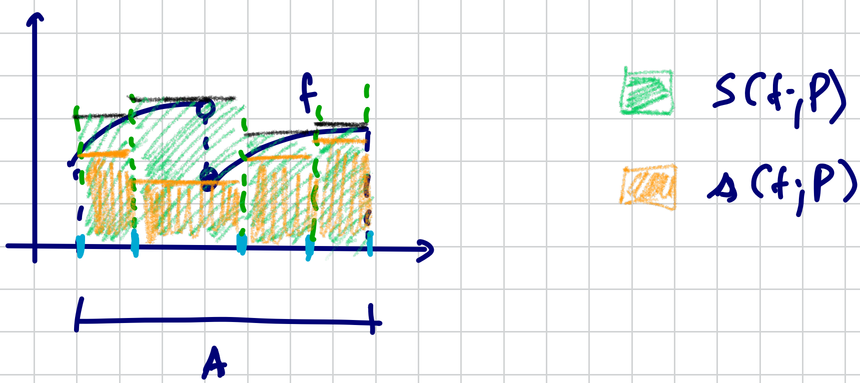
20/05/26 – AULA 22

Encerramos a aula passada provando o critério de integrabilidade e apresentando um exemplo de cálculo de uma integral em um bloco do $\mathbb{R}^2$ (dupla)

Recordando o critério de integrabilidade: $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função limitada num bloco $A \subset \mathbb{R}^m$ é integrável em A, se, e somente se,

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists P$ partição de A tal que

$$S(f;P) - s(f;P) < \varepsilon.$$



FIXADO $\varepsilon > 0$,
VAI EXISTIR UMA PARTIÇÃO P À QUAL $S(f;P) - s(f;P) < \varepsilon$

(ou seja, o erro fica pequeno)

Fizemos um exemplo de cálculo de integral por definição, onde usamos propriedades de somatório; tais como:

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 1 = \underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{n \text{ aditivos}} = n$

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+3+\cdots+n = \frac{(1+n)\cdot n}{2}$

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$

Vejamos outro exemplo:

02) Uma variante da função de Dirichlet.

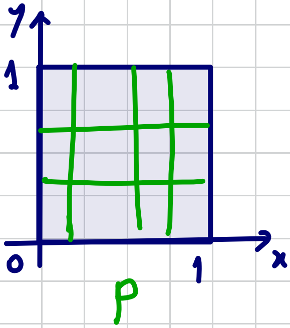
$f : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x, y \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \text{ ou } y \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

AF: f não é integrável.

Seja P uma partição qualquer do bloco $A = [0,1]\times[0,1]$, determinando subblocos

$B \in P$.



Devido à densidade de $\mathbb{Q}$ e de $\mathbb{I}$ em $\mathbb{R}$, em cada subbloco $B \in P$ conterá pontos nos quais ambas coordenadas serão racionais, e também pontos onde pelo menos uma coordenada não é.

Ou seja; $\forall B \in P$:

$$m_i = \inf_{x \in B} f(x) = 0 \quad e \quad M_i = \sup_{x \in B} f(x) = 1.$$

Disso; tem-se que:

$$S(f;P) = \sum_{B \in P} \underbrace{M_i}_{=1} \cdot Vol(B) = \sum_{B \in P} Vol(B) =$$

$$= Vol(A) = \text{área de } A = 1 \cdot 1 = 1.$$

$$\Rightarrow \boxed{S(f;P) = 1}, \ \forall P \text{ partição de } A.$$

Então,
$$\overline{\int_A} f = \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} S(f;P) = 1.$$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{\int_A} f = 1} \qquad (*)$$

Por outro lado,
$$s(f;P) = \sum_{B\in P} \underbrace{m_i}_{=0} \cdot \operatorname{Vol}(B) = 0, \quad \forall P - \text{partição}$$

Logo,
$$\underline{\int_A} f = \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \overbrace{s(f;P)}^{=0} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{\int_A} f = 0} \qquad (**)$$

Portanto, de $(*)$ e $(**)$ segue que f não é integrável.

PROPOSIÇÃO: (PROPRIEDADES DA INTEGRAL DEFINIDA)

Sejam $f, g : A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ funções integráveis num bloco A do $\mathbb{R}^m$. Então, valem as propriedades:

01) $f+g$ é integrável, e

$$\int_A (f+g) = \int_A f + \int_A g$$

02) $c \cdot f$ é integrável, onde $c \in \mathbb{R}$, e

$$\int_A c \cdot f = c \cdot \int_A f.$$

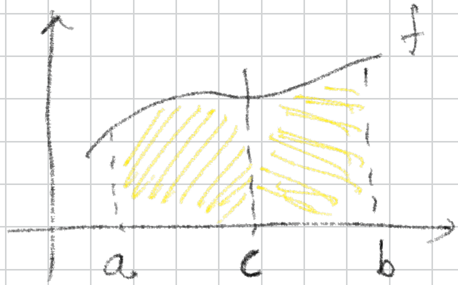
03) Se $f \geq 0$, então $\int_A f \geq 0$. Além disso, se $f \geq g$, então $\int_A f \geq \int_A g$.

04) $\left| \int_A f \right| \leq \int_A |f|$.

05) Se $A = X \dot{\cup} Y$ (união disjunta), então

$$\int_A f = \int_X f + \int_Y f.$$

para uma variável:



$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

DEMONSTRAÇÃO: Faremos apenas a prova da propriedade 03.

Suponha $f \geq 0$, ou seja, $f(x) \geq 0$, $\forall x \in A$.

A mostrar: $\int_A f \geq 0$.

Dada P uma partição qualquer do bloco A, segue que $\forall\ B \in P$ subbloco de A, tem-se que

$$M_i = \sup_{x \in B} f(x) \geq 0;$$

e como

$$vol(B) > 0,$$

então:

$$\overline{\int_A} f = \inf_{P \text{ é partição de } A} S(f;P) = \inf_{P \text{ é partição de } A} \sum_{B \in P} \underbrace{M_{i\ldots}}_{\geq 0} \underbrace{\mathrm{Vol}(B)}_{> 0} \geq 0$$

Ou seja,

$$\overline{\int_A} f \geq 0 .$$

Como f é integrável, tem-se que:

$$\int_A f = \overline{\int_A} f \geq 0 \implies \boxed{\int_A f \geq 0}$$

Isto prova a 1ª parte da propriedade 03.

Resta mostrar que: se $f \geq g$, então $\int_A f \geq \int_A g$.

Define $h : A \to \mathbb{R}$ por

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

Então, $h(x) \geq 0$, $\forall x \in A$. (pois $f \geq g$, por hipótese)

Assim, pelo provado na primeira parte, segue que

$$\int_A h \geq 0 .$$

Ou seja:

$$\int_A f - \int_A g = \int_A (f-g) = \int_A h \geq 0$$

PROPRIEDADE 1

$$\Rightarrow \int_A f - \int_A g \geq 0$$

$$\boxed{\int_A f \geq \int_A g}$$

$\square$

INTEGRAIS EM REGIÕES MAIS GERAIS

Até o presente momento estudamos integrais múltiplas definidas em blocos do $\mathbb{R}^n$. Precisamos avançar os estudos para regiões mais gerais.

Para isto, precisamos apresentar alguns conceitos.

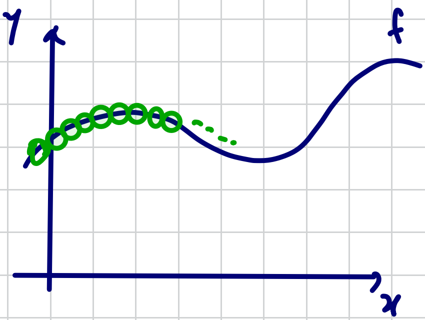
CONJUNTO DE MEDIDA NULA:

Def.: Dizemos que um conjunto $X \subset \mathbb{R}^m$ tem medida nula em $\mathbb{R}^m$, e escrevemos $\text{med}(X) = 0$, se, $\forall \varepsilon > 0$, existir uma sequência (C_n) de abertos do $\mathbb{R}^m$, tal que

$$X \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \text{Vol}(C_n) < \varepsilon.$$

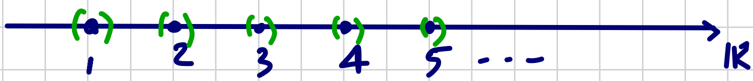
Vejamos alguns exemplos ilustrativos.

01) Em $\mathbb{R}^2$; uma curva tem medida nula, pois no plano, uma curva tem área zero.



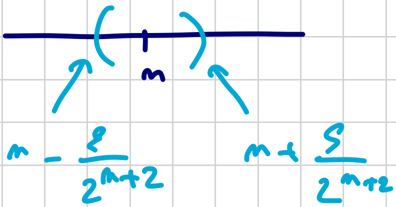
Ou seja, fixado $\varepsilon > 0$, pode-se construir uma sequência (C_n) de abertos cobrindo a curva, e cuja soma de suas áreas seja menor do que $\varepsilon > 0$.

02) Em $\mathbb{R}$, o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais tem medida nula.



Tome $\varepsilon > 0$; $0 < \varepsilon < 1$.

Define $C_n := B_{\frac{\varepsilon}{2^{n+2}}}(n) = \left(n - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}} , n + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}} \right)$



Neste caso,

$$\mathbb{N} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$$, por construção.

Além disso, observe que

Vol C_n = comprimento do intervalo C_n.

$$= 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2^{n+2}} = \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$$

Assim:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Vol}(C_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2^2} + \frac{\varepsilon}{2^3} + \frac{\varepsilon}{2^4} + \cdots$$

$$= \frac{\varepsilon}{2^2}\underbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots\right)}_{\substack{\text{SOMA DE P.G. DE} \\ \text{RAZÃO } \frac{1}{2} \\ \text{(INFINITA)}}}$$

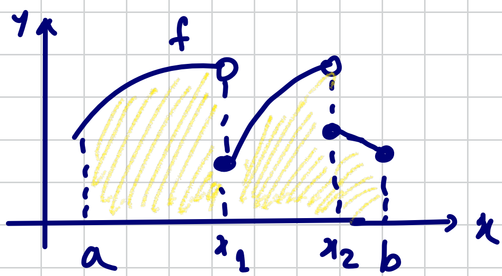
$$= \frac{\varepsilon}{2^2} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\varepsilon}{2^2} \cdot 1 = \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon.$$

Portanto $\mathrm{med}(\mathbb{N}) = 0$, ou seja, $\mathbb{N}$ possui medida zero em $\mathbb{R}$.

TEOREMA DE LEBESGUE: Uma função $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ definida num bloco A do $\mathbb{R}^m$ é integrável se, e somente se, o conjunto D_f de seus pontos de descontinuidade, tiver medida zero.

A demonstração desse resultado não é dada em cursos de cálculo.

EXEMPLOS: Em $\mathbb{R}$: do cálculo 2, tem-se; se f tiver o gráfico:



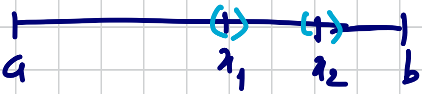
$f \geq 0$.

$\exists \int_a^b f$ = área abaixo do gráfico, embora f seja descontínua nos pontos x_1 e x_2.

De fato, f é integrável neste caso, pois o conjunto de pontos onde f é descontínua é

$$D_f = \{x_1, x_2\};$$ e

med.$(D_f) = 0$. De fato; fixe $\varepsilon > 0$ qualquer;



e seja

$$C_1 = B_{\frac{\varepsilon}{100}}(x_1);$$

$$C_2 = B_{\frac{\varepsilon}{100}}(x_2)$$

Então $D_f \subset C_1 \cup C_2 = \bigcup_{n=1}^{2} C_n$;

e Vol C_1 + Vol C_2 = comprim. C_1 + compr. C_2 =

$$= 2 \cdot \frac{\varepsilon}{100} + 2 \cdot \frac{\varepsilon}{100} =$$

$$= \frac{\varepsilon}{50} + \frac{\varepsilon}{50} = \frac{\varepsilon}{25} < \varepsilon.$$

$\Rightarrow$ med$(D_f) = 0$.

02) A função de Dirichlet apresentada no início da aula: $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$;

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x, y \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \text{ ou } y \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

não é contínua em nenhum ponto de $[0,1]\times[0,1]$.

Logo, $D_f = [0,1]\times[0,1] = A$.

Então, $med(D_f) =$ área do bloco $A = 1\times 1 = 1$.

$$\Rightarrow med(D_f) \neq 0$$

Logo, a função de Dirichlet não é integrável.

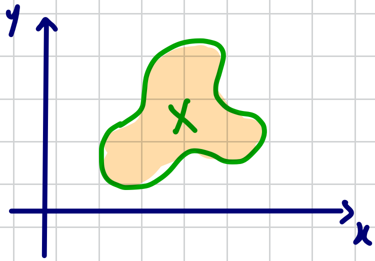
FUNÇÃO CARACTERÍSTICA

Def.: Dado $X \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto não vazio. Definimos a função característica em X por

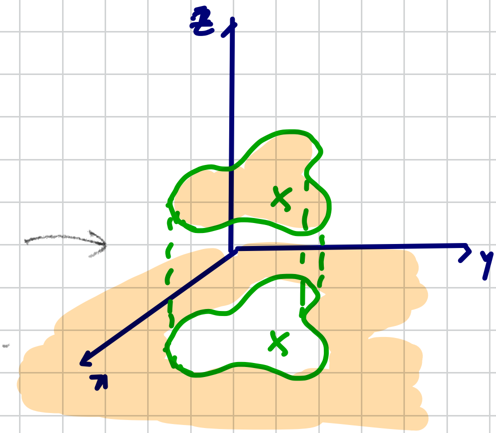
$$\xi_X(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in X \\ 0, & \text{se } x \notin X. \end{cases}$$

Um fato importante que precisamos mencionar:

FATO: O conjunto de pontos de descontinuidade da função característica ξ_X corresponde à fronteira do conjunto X, ou seja, à ∂X.



$\xi_X : X \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}.$



É NA ∂X QUE ξ_X SALTA DE 0 PARA 1.

Frente a este conceito, definimos o volume do conjunto X por:

$$vol(X) = \int_{\mathbb{R}^m} \xi_X \, dx.$$

<u>**Ex.:**</u> Em $\mathbb{R}^2$; $\quad X = B_R(0).$

$$Vol(B_R(0)) = \int_{\mathbb{R}^2} \xi_X \, dx\,dy = \int_X \xi_X + \int_{\mathbb{R}^2 \setminus X} \xi_X$$

$$= \int_X 1 + \int_{\mathbb{R}^2 \setminus X} 0 = \int_X 1 = \pi R^2$$