CÁLCULO 3, TURMA T3.

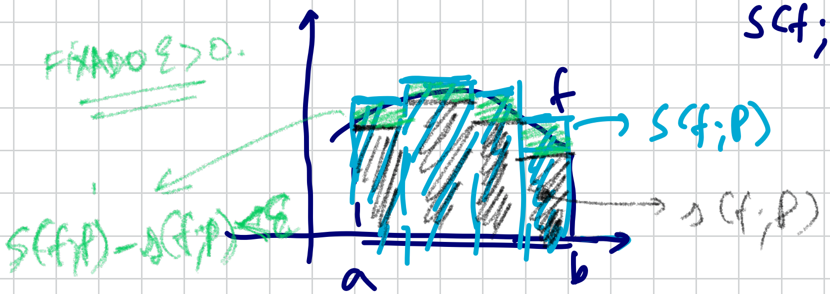
$\boxed{20/05/26 \text{ – AULA 22}}$

A aula passada foi encerrada provando o critério de integrabilidade:

$f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ limitada no bloco $A \subset \mathbb{R}^m$.

f é integrável $\iff$ $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ P partição de A tal que

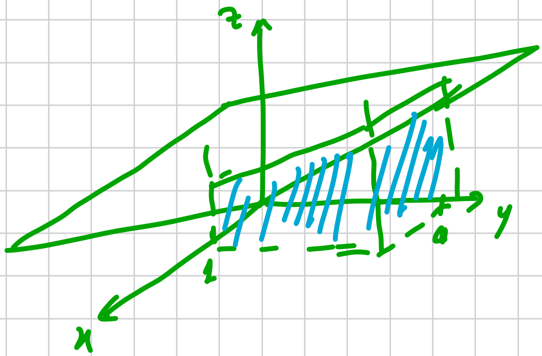
$$S(f;P) - s(f;P) < \varepsilon.$$



No que segue, daremos um exemplo de cálculo de uma integral no $\mathbb{R}^2$ (dupla) pela definição.

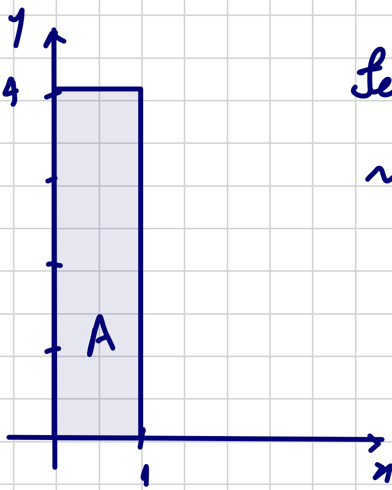
Ex.: Calcule $\displaystyle\int_A (2x + 4y)\,dx\,dy$, sendo A o retângulo: $A = [0,1] \times [0,4]$.

Solução: Obs: $z = 2x+4y$ é a eq. de um plano $\mathbb{R}^3$. Então $\int_A (2x+4y)\,dx\,dy$ fornecerá o volume do sólido limitado pelo retângulo $[0,1]\times[0,4]$ no plano xy e pelo plano $f(x,y)$.



Vamos à resolução do problema.

Seja $z = f(x,y) = 2x+4y$ no retângulo A.

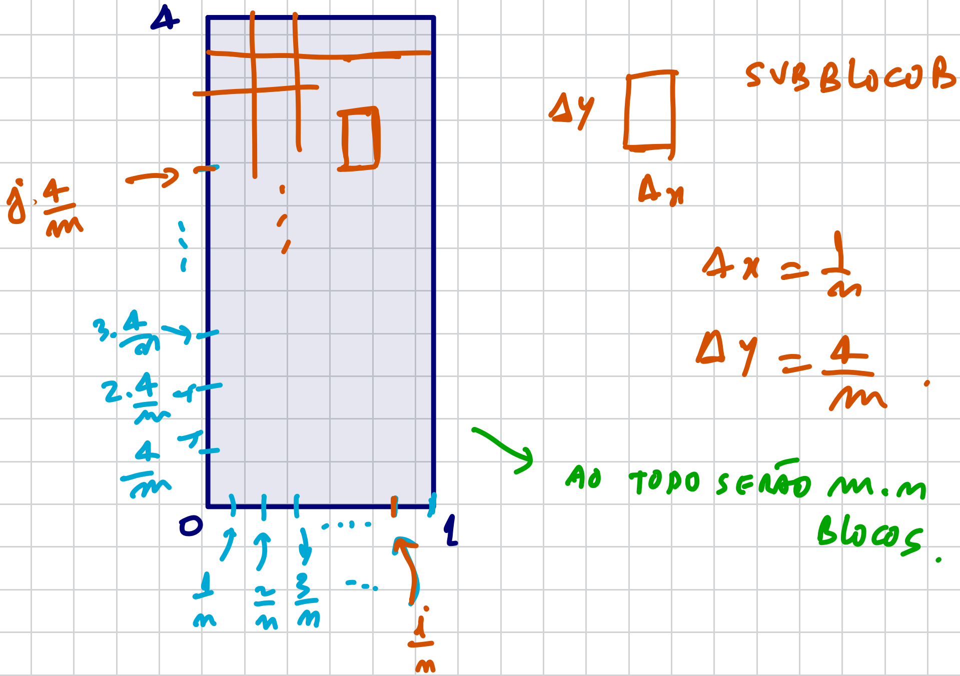


Seja $P = P_1 \times P_2$ uma partição regular do bloco A, onde P_1 divide $[0,1]$ em n subintervalos da forma (regulares):

$$\Delta x = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n};$$

e P_2 divide o intervalo $[0,4]$ em m subinterrelos regulares da forma

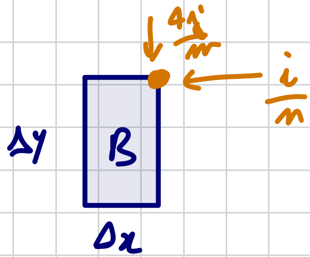
$$\Delta y = \frac{4-0}{n} = \frac{4}{n}$$



O volume de cada um destes subblocos B da partição P será dado por (área):

$$\mathrm{Vol}(B) = \Delta x \cdot \Delta y = \frac{1}{n}\cdot\frac{4}{n} = \frac{4}{n\cdot n}$$

Como $f(x,y) = 2x+4y$ é crescente em A, então o máximo (supremo) em cada subbloco B de P será no canto superior direito:



Ou seja:

$$M_i = \sup_{B} f(x) = (2x+4y)\Big|_{\substack{x=\frac{i}{n}\\ y=\frac{4j}{m}}} =$$

$$= 2\cdot\frac{i}{n} + 4\cdot\frac{4j}{m} = \frac{2i}{n} + \frac{16j}{m}.$$

Assim, montando a soma superior, vem:

$$s(f;P) = \sum_{B\in P} M_i \,\mathrm{Vol}(B) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{2i}{n} + \frac{16j}{m}\right)\cdot\frac{4}{m\cdot n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{8i}{m\cdot n^2} + \frac{64j}{m^2 n}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}\underbrace{\frac{8i}{m\cdot n^2}}_{\text{CONSTANTE PARA } j}\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{64j}{m^2 n}\right) =$$

CONSTANTE PARA j

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{8i}{m \cdot m^2} \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{m} 1}_{m} + \sum_{i=1}^{n} \frac{64}{m^2 m} \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{m} j}_{1+2+3+\dots+m = \frac{(1+m)\cdot m}{2}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{8i}{\cancel{m} \cdot m^2} \cdot \cancel{m} + \sum_{i=1}^{n} \frac{64}{\cancel{m^2} \cdot m} \frac{(1+m)\cdot \cancel{m}}{2} =$$

$$= \frac{8}{m^2} \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{n} i}_{\frac{(1+n)\cdot n}{2}} + \frac{\cancel{64}^{32}}{m \cdot n} \cdot \frac{(1+m)}{\cancel{2}} \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{n} 1}_{=n}$$

$$= \frac{\cancel{8}^{4}}{\cancel{n^2}} \cdot \frac{(1+n)\cdot \cancel{n}}{\cancel{2}} + \frac{32(1+m)}{m \cdot \cancel{n}} \cdot \cancel{n} =$$

$$= \frac{4}{n}(1+n) + \frac{32(1+m)}{m} =$$

$$= \frac{4}{n} + 4 + \frac{32}{m} + 32 = \frac{4}{n} + \frac{32}{m} + 36$$

Ou seja:

$$S(f; P) = \frac{4}{n} + \frac{32}{m} + 36$$

Então, passando o limite com $m, n \to \infty$, vamos obter:

$$\overline{\int_A} f = \lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} S(f,P) = \lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \underbrace{\frac{4}{n}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{32}{m}}_{\to 0} + 36 = 36$$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{\int_A} f = 36}$$

Analogamente se mostra que $\boxed{\underline{\int_A} f = 36}$

Então, f é integrável, e

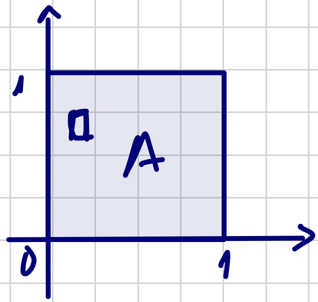
$$\int_A f = 36$$

Resp.: $\int_A (2x+4y)\,dx\,dy = 36.$

02) Uma variante da função de Dirichlet:

$f: [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x, y \in \mathbb{Q}. \\ 0, & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \text{ ou } y \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$



Seja $P = P_1 \times P_2$ partição do bloco $A = [0,1] \times [0,1]$. Cada sub-bloco $B \in P$ conterá pontos com coordenadas racionais e irracionais (devido à densidade de $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ em $\mathbb{R}$).

Assim, $\forall B \in P$ sub-bloco de A, tem-se que

$$m_i = \inf_{x \in B} f(x) = 0 \quad ; \quad M_i = \sup_{x \in B} f(x) = 1.$$

Assim:

$$S(f;P) = \sum_{B \in P} \underbrace{M_i}_{1} \cdot \text{Vol}(B) = \sum_{B \in P} \text{Vol}(B) =$$

$$= \text{Vol}(A) = \text{área} = 1 \times 1 = 1.$$

$\Rightarrow S(f;P) = 1, \quad \forall P$ partição.

Logo, $\boxed{\overline{\int_A} f = 1.}$ $(*)$

Por outro lado:

$$s(f;P) = \sum_{B \in P} \underbrace{m_i}_{=0} \cdot \text{Vol}(B) = 0$$

$\Rightarrow s(f;P) = 0, \quad \forall P$ partição de B.

$$\Rightarrow \boxed{\underline{\int_A} f = 0} \quad (**)$$

De $(*)$ e $(**)$ segue que f não é integrável.

PROPOSIÇÃO: (PROPRIEDADES DA INTEGRAL DEFINIDA)

Sejam $f, g : A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ funções integráveis no bloco $A \subset \mathbb{R}^m$. Então:

01) $f+g$ é integrável, e

$$\int_A (f+g) = \int_A f + \int_A g.$$

02) $c \cdot f$ é integrável $(c \in \mathbb{R})$; com

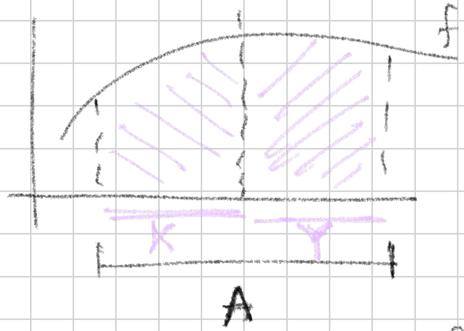
$$\int_A c \cdot f = c \cdot \int_A f.$$

03) Se $f \geq 0$, então $\int_A f \geq 0$. Além disso, se $f \geq g$, então $\int_A f \geq \int_A g$.

04) $\left| \int_A f \right| \leq \int_A |f|$.

05) Se $A = X \dot{\cup} Y$ (união disjunta), então

$$\int_A f = \int_X f + \int_Y f.$$



$$\int_A f = \int_X f + \int_Y f$$

DEMONSTR: Provaremos apenas o 03.

Suponha $f \geq 0$ em A.

Então, $f(x) \geq 0$, $\forall x \in A$.

Seja P uma partição qualquer do bloco A, determinando subblocos $B \in P$.

Como $f \geq 0$, então, $M_i = \sup_{x \in B} f(x) \geq 0$

Além disso, $\text{vol}(B) > 0$, $\forall B \in P$.

Disso, segue que

$$\overline{\int_A} f = \inf_{\substack{P \text{ partição} \\ \text{do } A}} S(f;P) = \inf_{\substack{P \text{ partição} \\ \text{do } A}} \sum_{B \in P} \underbrace{M_i}_{\geq 0} \underbrace{\text{vol}(B)}_{> 0} \geq 0$$

Logo, $\overline{\int_A} f \geq 0$.

Como, por hipótese, f é integrável, segue que

$$\int_A f = \overline{\int_A} f \geq 0 \implies \boxed{\int_A f \geq 0}$$

Isso conclui a primeira parte da prova de 03.

Vejamos o restante: suponha agora que $f \geq g$.

Defina $h: A \to \mathbb{R}$ por

$$h(x) = f(x) - g(x).$$

Logo, $h(x) \geq 0$, $\forall x \in A$.

Então, pelo provado na 1ª parte, segue que

$$\int_A h \geq 0, \text{ ou seja;}$$

$$\int_A (f-g) \geq 0$$

Pela propriedade 1;

$$\int_A f - \int_A g = \int_A f - g \geq 0$$

$$\Rightarrow \int_A f - \int_A g \geq 0 \Rightarrow \boxed{\int_A f \geq \int_A g.}$$

$\square$

INTEGRAIS EM CONJUNTOS MAIS GERAIS

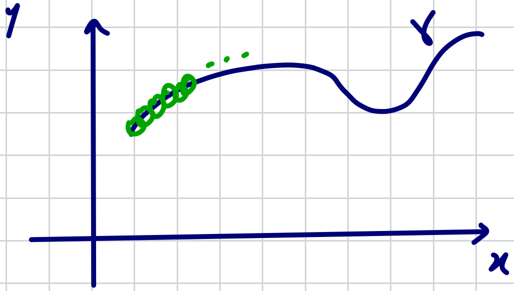
O que se estudou até agora foi a integral de funções definidas em blocos do $\mathbb{R}^m$. Precisamos de integrais em conjuntos mais gerais do que blocos do $\mathbb{R}^m$. Para isto, precisamos, inicialmente, apresentar alguns conceitos.

CONJUNTO DE MEDIDA NULA:

Def.: Dizemos que um conjunto $X \subset \mathbb{R}^m$ tem medida nula (e escrevemos $med(X) = 0$) se, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ $(C_n) \subset \mathbb{R}^m$ sequência de abertos do $\mathbb{R}^m$, tais que:

$$X \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \quad e \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Vol}(C_n) < \varepsilon.$$

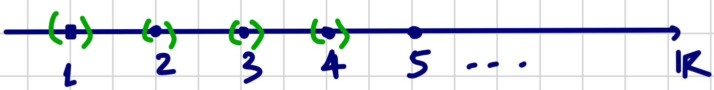
Ex:



EM $\mathbb{R}^2$ UMA CURVA γ TERÁ MEDIDA NULA.
É POSSÍVEL CONSTRUIR UMA SEQ. DE ABERTOS QUE COBRE γ, TAL QUE A SOMA DAS ÁREAS DESSA COBERTURA FIQUE MENOR DO QUE UM $\varepsilon > 0$ PREVIAMENTE FIXADO

Vol

Ex. 02: Considere o conj. $\mathbb{N}$ dos números naturais em $\mathbb{R}$.



AF: $\mathrm{med}(\mathbb{N}) = 0$. Ou seja, em $\mathbb{R}$, o conj. dos números naturais tem medida nula.

De fato, fixe $\varepsilon > 0$ $(0 < \varepsilon < 1)$

Construa uma sequência (C_n) de intervalos abertos dado por: $C_n = B\left(n, \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}\right)$

Assim $\mathbb{N} \subset C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n \cup \dots$

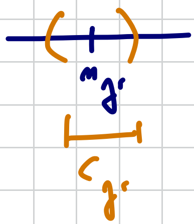
(pois cada $n_0 \in \mathbb{N}$ é o centro do respectivo conj. C_{n_0}) – por construção

$$\Rightarrow \mathbb{N} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$$

Além disso:

$$\sum_{n=1}^{\infty} Vol(C_n) = Vol(C_1) + Vol(C_2) + \dots \; ; \text{ onde}$$

$Vol(C_j)$ = comprimento do intervalo C_j.



$$C_j = B\Big(j, \underbrace{\frac{\varepsilon}{2^{j+2}}}_{\text{RAIO}}\Big)$$

comprimento de C_j = 2×RAIO

$$= 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2^{j+2}} = \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}$$

$$Vol(C_j) = \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}$$

Assim:

$$\sum_{n=1}^{\infty} Vol\, C_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \frac{\varepsilon}{2^2} + \frac{\varepsilon}{2^3} + \frac{\varepsilon}{2^4} + \frac{\varepsilon}{2^5} + \dots$$

$$= \frac{\varepsilon}{2^2} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots\right)}_{\text{SOMA DE P.G. INFINITA DE RAZÃO } \frac{1}{2}} =$$

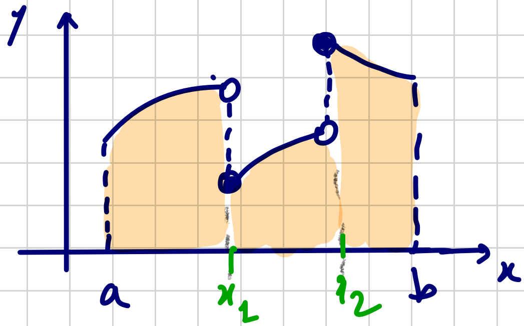
$$= \frac{\varepsilon}{2^2} \cdot \frac{1}{\underbrace{1 - \frac{1}{2}}_{2}} = \frac{\varepsilon}{\cancel{2^2}} \cdot \cancel{2} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{vol}(C_n) < \varepsilon.$$

TEOREMA (TEOREMA DE LEBESGUE) Uma função $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, onde $A \subset \mathbb{R}^m$ é um bloco, é integrável se, e somente se, o conjunto D_f dos pontos de descontinuidade de f, possui medida nula.

A demonstração desse teorema é omitida em cursos de cálculo.

Vamos mostrar um exemplo:



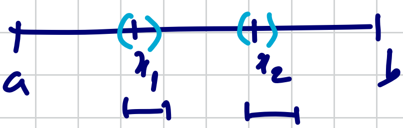
$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ limitada. Note que f não é contínua em $[a,b]$, mas $\exists \int_a^b f =$ área.

De fato o conj. D_f dos pontos de descontinuidade de f é o conj.:

$$D_f = \{x_1, x_2\}.$$

em $[a,b]$, med $D_f = 0$

$\forall \varepsilon > 0$, tome



$$C_1 = B_{\frac{\varepsilon}{10}}(x_1);$$

$$C_2 = B_{\frac{\varepsilon}{10}}(x_2).$$

Então, $D_f = \{x_1, x_2\} \subset C_1 \cup C_2$;

e $\sum_{i=1}^{2} \text{Vol } C_i = \text{Vol}(C_1) + \text{Vol}(C_2) =$

$$= 2 \cdot \frac{\varepsilon}{10} + 2 \cdot \frac{\varepsilon}{10} = \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} =$$

$$= 2 \cdot \frac{\varepsilon}{5} < \varepsilon.$$

02) A função $f: [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x, y \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \text{ ou } y \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

FUNÇÃO DE DIRICHLET].

Note que, neste caso, $D_f = [0,1]\times[0,1]$.

A função de Dirichlet não é cont. em nenhum ponto do domínio.

Logo, $\text{med}(D_f) = \text{área} = 1\times 1 = 1 \neq 0$.

Ou seja, f não é integrável.