CÁLCULO 3, TURMA T3.

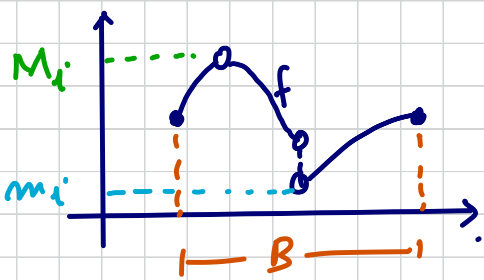
18/05/26 – AULA 21

Na aula passada iniciamos o estudo de integrais múltiplas. Sendo $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função limitada, definida em um bloco $A \subset \mathbb{R}^n$, definimos as somas inferior e superior de f, em relação a uma partição P do bloco A, respectivamente, por:

$$s(f;P) = \sum_{B \in P} m_i \cdot \mathrm{Vol}(B) \quad ;$$

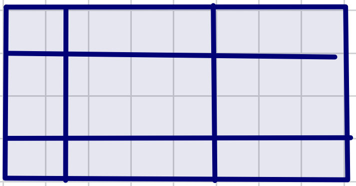
$$S(f;P) = \sum_{B \in P} M_i \cdot \mathrm{Vol}(B) \quad , \text{ onde}$$

$$m_i = \inf_{x \in B} f(x) \quad \text{e} \quad M_i = \sup_{x \in B} f(x) .$$

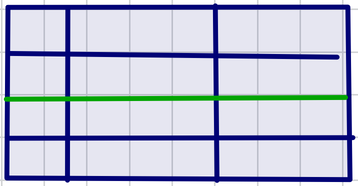


o ínfimo m_i e o supremo M_i em um bloco B (no caso, em um intervalo)

Vimos também o conceito de refinamento de uma partição. Dizemos que Q é um refinamento de P se $Q \subset P$.



PARTIÇÃO P de A.



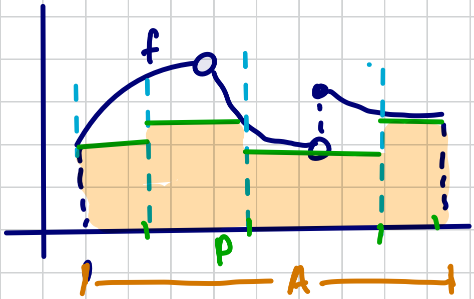
PARTIÇÃO Q de A.

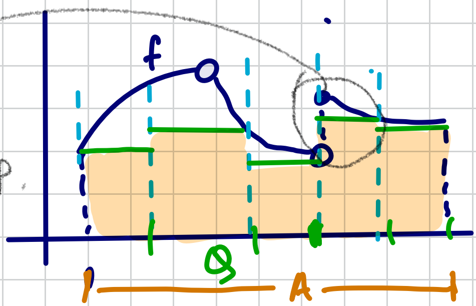
LEMA 2: Sejam P e Q duas partições de um bloco $A \subset \mathbb{R}^m$, com Q refinamento de P, ou seja, $Q \subset P$; e $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Então:

$$s(f;P) \leq \underbrace{s(f;Q) \overset{\text{LEMA 1}}{\leq} S(f;Q)}_{\text{REFINAMENTO}} \leq S(f;P)$$

Ou seja, ao efetuar um refinamento da partição, a soma inferior não aumenta e a soma superior não diminui.

A demonstração desse resultado não será dada, mas um esquema a torna bem visual: no caso de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$:





LEMA 03 Seja $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função limitada em um bloco $A \subset \mathbb{R}^m$; e P, Q duas partições de A; quaisquer.

Então;
$$s(f; P) \leq S(f; Q)$$

Ou seja, qualquer soma inferior é sempre menor ou igual a qualquer soma superior.

DEMONSTR.: Basta tomar $\tilde{P} = P \cup Q$ um refinamento tanto para P quanto para Q. Assim, pelo LEMA 2 segue que

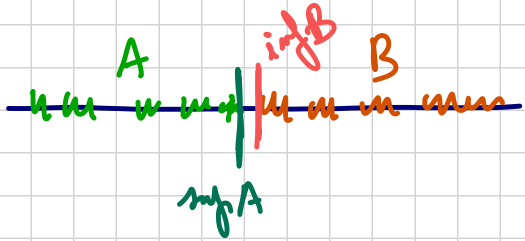
$$s(f;P) \leq s(f;\tilde{P}) \leq S(f;\tilde{P}) \leq S(f;Q).$$

$\square$

INTEGRAIS SUPERIOR E INFERIOR:

De um resultado da Análise, tem-se:

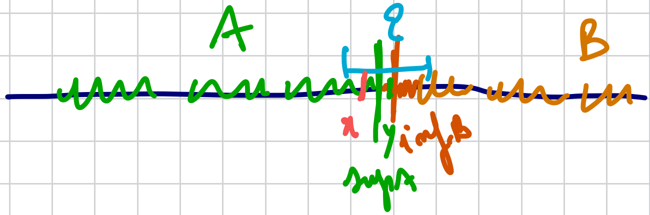
Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ conjuntos não vazios, tais que, $\forall x \in A$, $\forall y \in B$, $x \leq y$.



Então, $\sup A \leq \inf B$

Além disso, temos que

$(*)$ $\boxed{\sup A = \inf B \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists\, x \in A,\ \exists\, y \in B \text{ tais que } y - x < \varepsilon.}$



$\varepsilon > 0$: erro de aproximação.

Traduzindo este resultado para o nosso contexto, temos: considere $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função limitada no bloco $A \subset \mathbb{R}^m$, e defina os conjuntos:

$$M = \{ s(f;P) : P \text{ é partição de } A \} \subset \mathbb{R}$$

$$N = \{ S(f;P) : P \text{ é partição de } A \} \subset \mathbb{R}$$

Então, $\forall x \in M$, $\forall y \in N$, tem-se que $x \leq y$ (pois $s(f;P) \leq S(f;Q)$)

Disso;
$$\sup M \leq \inf N,$$

ou seja,

$$\sup_{P \text{ part. de } A} s(f;P) \leq \inf_{P \text{ part. de } A} S(f;P).$$

Isto inspira definir:

<u>Def.:</u> Seja $f : A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função limitada em um bloco $A \subset \mathbb{R}^m$. Definimos as integrais inferior e superior de f em A, respectivamente, por:

$$\underline{\int_A} f = \sup \{ s(f;P) : P \text{ é partição de } A \}.$$

e

$$\overline{\int_A} f = \inf \{ S(f;P) : P \text{ é partição de } A \}.$$

[lembre-se: $s(f;P) = \sum_{B \in P} m_B \cdot \mathrm{Vol}(B)$ e

$$S(f;P) = \sum_{B \in P} M_i \cdot Vol(B)\Big]$$

Def.: Dizemos que $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ é integrável no bloco A se, e só se,

$$\underline{\int_A} f = \overline{\int_A} f.$$

Neste caso, o valor comum chama-se integral de f em A, e é denotado por

$$\int_A f.$$

Se $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; então costuma-se escrever:

$$\int_A f = \int_A f(x,y) \cdot \underbrace{dx\,dy}_{\text{DUAS VARIÁVEIS.}}$$

Ainda, do resultado (*) apresentado anteriormente, tem-se:

$$\underline{\int_A} f = \overline{\int_A} f \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists P_1, P_2 \text{ partições de } A \text{, tais que } S(f;P) - s(f;Q) < \varepsilon.$$

Isto já é um critério de integrabilidade, mas pouco útil, pois usa duas partições. No que segue, melhoramos este resultado no seguinte:

TEOREMA: (CRITÉRIO DE INTEGRABILIDADE) Seja $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função limitada num bloco $A \subset \mathbb{R}^m$. Então, f é integrável em A se, e somente se, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists P$ partição de A tal que $S(f;P) - s(f;P) < \varepsilon$.

DEMONSTR.: Seja $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função limitada num bloco A do $\mathbb{R}^m$.

($\Rightarrow$) Suponha f integrável.

Então, dado $\varepsilon > 0$, $\exists$ P_1, P_2 partições de A tais que

$$S(f; P_1) - s(f; P_2) < \varepsilon.$$

Seja $P = P_1 + P_2$ um refinamento tanto para P_1 quanto para P_2. Então, pelo LEMA 2, a soma inferior não diminui e a soma superior não aumenta, ou seja:

$$s(f; P_2) \leq s(f; P) \leq S(f; P) \leq S(f; P_1)$$

Como: $S(f; P_1) - s(f; P_2) < \varepsilon$, por hipótese, pelas desigualdades acima, podemos escrever:

$$(*) \quad S(f; P) \leq S(f; P_1)$$

$$s(f;P) \geq s(f;P_2) \quad (\times -1)$$

$$(**) \quad -s(f;P) \leq -s(f;P_2)$$

Tomando $(*)$ e $(**)$, vem:

$$S(f;P) - s(f;P) \leq S(f;P_1) - s(f;P_2) < \varepsilon$$

$\Rightarrow S(f;P) - s(f;P) < \varepsilon$, o que prova a 1ª parte.

$(\Leftarrow)$ Reciprocamente, suponha que
$$S(f;P) - s(f;P) < \varepsilon.$$

Então, basta tomar $P_1 = P$ e $P_2 = P$. Logo,

$$S(f;P_2) - s(f;P_1) < \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Ou seja, f é integrável.

$\square$

Na próxima aula, mostraremos um exemplo de cálculo de integral dupla por definição.