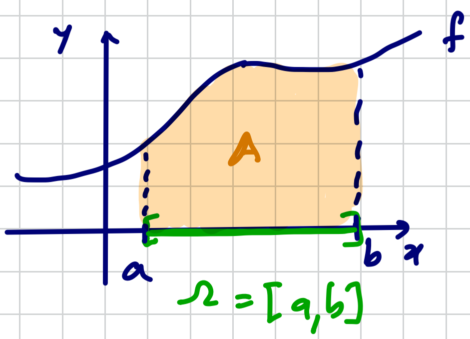
CÁLCULO 3, TURMA T3.

15/05/26 - AULA 20

INTEGRAIS MÚLTIPLAS.

INTRODUÇÃO: Queremos dar sentido a integrais definidas da forma $\int_{\Omega} f$, onde $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função escalar a n variáveis reais.

Recordando do CÁLCULO 2, se $f \geq 0$ em $\Omega \subset \mathbb{R}$, então $\int_{\Omega} f$ fornece a área abaixo do gráfico de f no intervalo $\Omega \subset \mathbb{R}$:

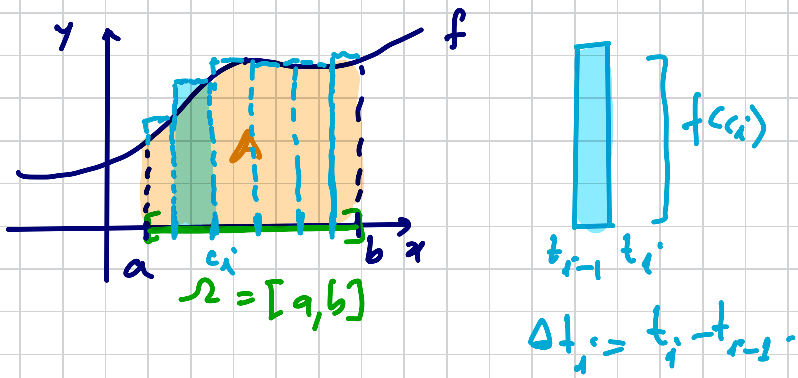


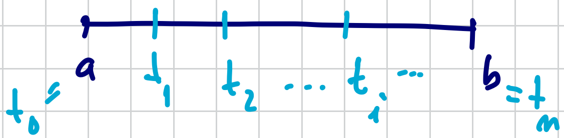
A: área abaixo do gráfico de f em $\Omega = [a,b]$.

Então, $A = \int_{\Omega} f = \int_a^b f(x)\,dx$.

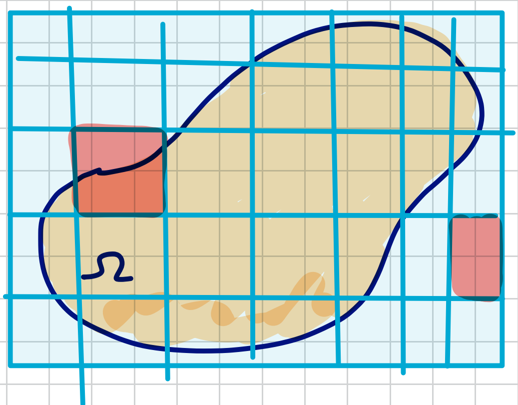
Para chegar a este resultado, tomámos uma partição P de [a,b], regular ou não, e tomámos uma soma de Riemann, tomando o limite quando o número n de subintervalos tendia ao infinito:

$$A = \int_{[a,b]} f = \lim_{n\to\infty} S(f;P) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot\Delta t_i$$

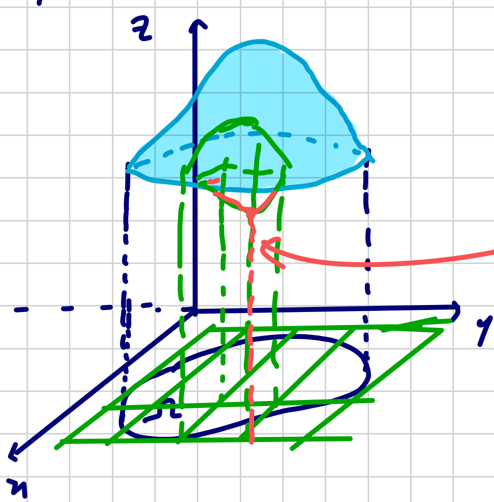




A dificuldade no cálculo a várias variáveis consiste no facto de que a região Ω de integração não é um intervalo, e sim uma região de dimensão n, e, tomando uma partição P, algumas partes da partição poderão ficar fora da região. Por exemplo, $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$



Como f é de duas variáveis, a partição deve ser feita com "cortes" horizontais e verticais, formando uma grade. Porém, a dificuldade consiste no fato de que algumas grades não estarão completamente contidas em Ω, como as duas destacadas na ilustração acima.



"PEDAÇO" FICA DE FORA, MAS COMO ESCREVER ISTO?

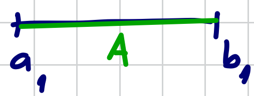
Por essa razão vamos considerar, primeiramente, integrais $\int_A f$, onde A é um bloco do $\mathbb{R}^m$.

BLOCOS NO $\mathbb{R}^m$.

<u>Def.:</u> Um bloco A no $\mathbb{R}^m$ é um conjunto da forma

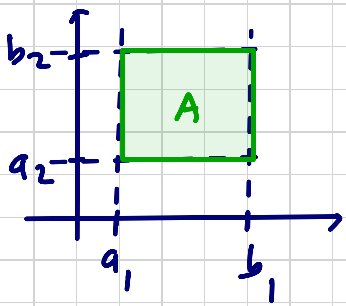
$$A = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_m, b_m].$$

<u>Ex:</u> Em $\mathbb{R}$, um bloco é um intervalo $[a_1, b_1]$



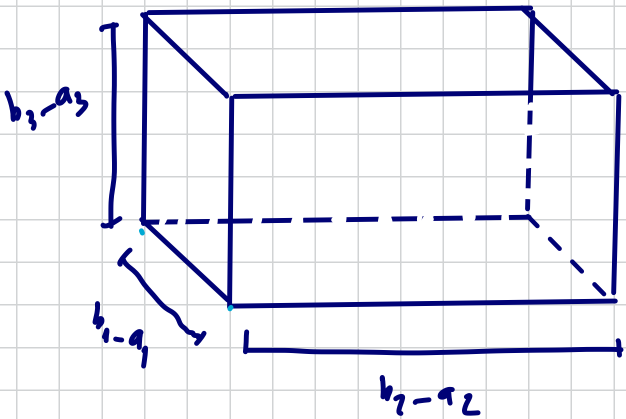
Em $\mathbb{R}^2$, um bloco será um retângulo:

$$A = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$$



Em $\mathbb{R}^3$, um bloco A será um paralelepípedo:

$$A = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$$



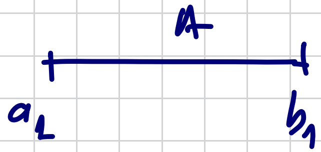
__Def.:__ O volume de um bloco $A \subset \mathbb{R}^m$ é definido por:

$$\text{Vol}(A) = \prod_{i=1}^{m} (b_i - a_i) =$$

$$= (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot \cdots (b_m - a_m).$$

(ou seja, Vol(A) é o produto de suas dimensões)

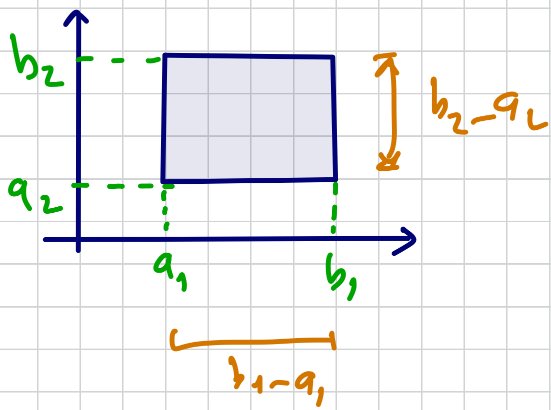
Note que, em $\mathbb{R}$, $Vol(A)$ é a medida do seu comprimento:



$$Vol(A) = b_1 - a_1.$$

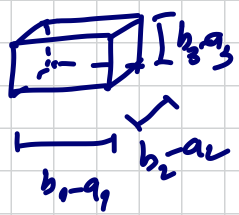
Em $\mathbb{R}^2$, $Vol(A)$ representa a área do retângulo: $A = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$

$$\Rightarrow Vol(A) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) = \text{área}.$$



Em $\mathbb{R}^3$, $Vol(A)$ denota o volume do paralelepípedo formado:

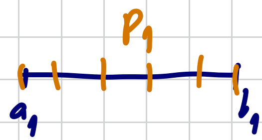
$$Vol(A) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot (b_3 - a_3)$$



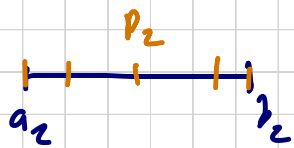
Def.: Dizemos que uma função $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ definida em um bloco A, é <u>limitada</u> se $\exists M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$, $\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in A$.

Def.: Uma partição P de um bloco $A \subset \mathbb{R}^m$ é o conjunto $P = P_1 \times P_2 \times \dots \times P_m$, onde P_j é partição do intervalo $[a_j, b_j]$; ou seja;

- P_1 é partição de $[a_1, b_1]$:

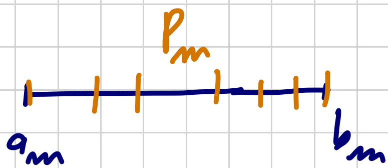


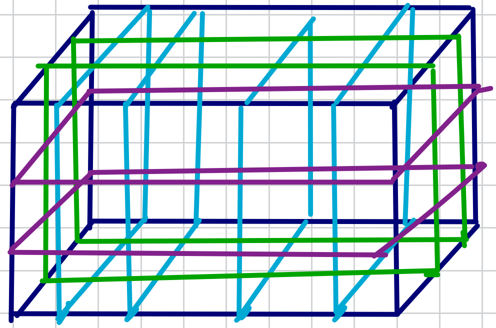
- P_2 é partição de $[a_2, b]$:



$\vdots$

- P_m é partição de $[a_m, b_m]$:





Uma partição P de um bloco $A \subset \mathbb{R}^m$ divide o mesmo em blocos menores, chamados de subblocos do bloco A. Ou seja, temos a def.:

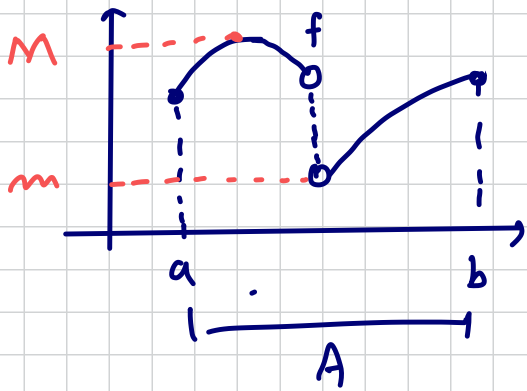
Def.: Uma partição P de de um bloco $A \subset \mathbb{R}^m$ divide A em subblocos $B \in P$ tais que

$$Vol(A) = \sum_{B \in P} Vol(B).$$

Def.: Seja $f : A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, A um bloco do $\mathbb{R}^m$, com f uma função limitada. Definimos o ínfimo e o supremo de f no bloco A, respectivamente, por:

- $\inf_A f(x)$ = maior cota inferior de $f(x)$.
- $\sup_A f(x)$ = menor cota superior de $f(x)$.

Ex.: em $\mathbb{R}$:



$\inf_A f(x) = m$

$\sup_A f(x) = M$
$= \max f(x)$

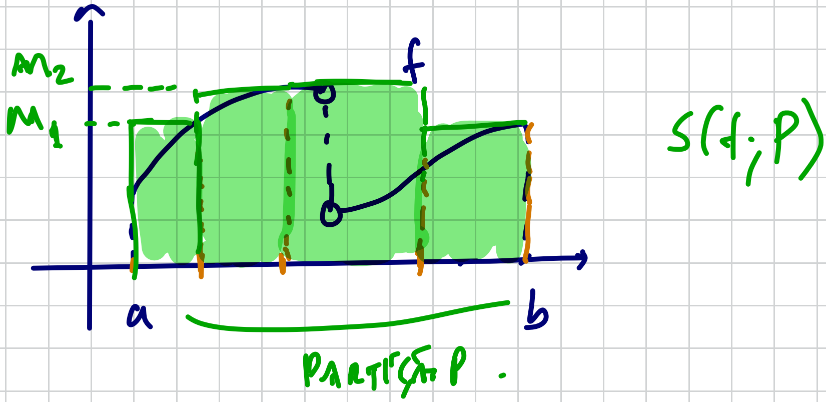
Def.: Seja $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função definida no bloco $A \subset \mathbb{R}^m$, e seja P uma partição de A.

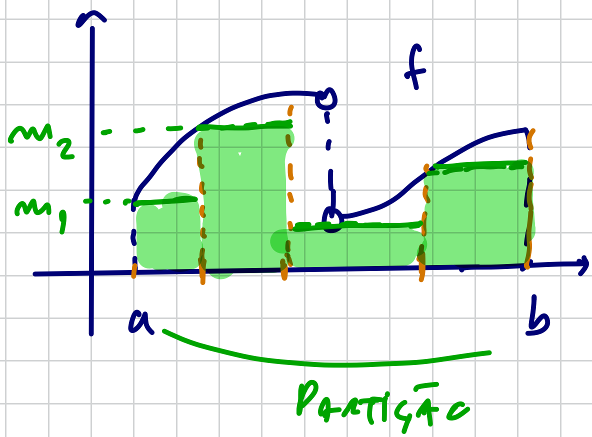
Definimos as somas superior e inferior de f por:

$$S(f;P) = \sum_{B \in P} M_i \cdot \mathrm{Vol}(B)$$

$$s(f;P) = \sum_{B \in P} m_i \cdot \mathrm{Vol}(B),$$

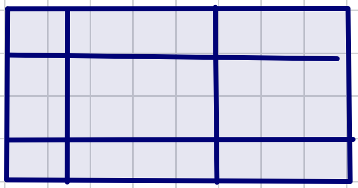
No caso $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:



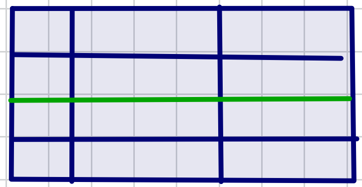


Note que $S(f;P)$ fornece uma aproximação (da área, no caso) por excesso, enquanto que $s(f;P)$ fornece uma aproximação por falta.

Def.: Sejam P e Q duas partições de um bloco $A \subset \mathbb{R}^m$. Dizemos que Q é um refinamento de P se $Q \subset P$.



PARTIÇÃO P de A.



PARTIÇÃO Q de A.

LEMA 1: Sejam $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ função limitada num bloco A; e $P \subset A$ uma partição de A.

Então:

$$s(f;P) \leq S(f;P).$$

[Ou seja, uma aproximação por falta sempre é menor ou igual do que uma por excesso].

DEMONSTR.: Note que, por definição;

$$m_i \leq M_i \quad \text{em cada}$$

subbloco $B \in P$.

Então, $\quad m_i \cdot \mathrm{Vol}(B) \leq M_i \cdot \mathrm{Vol}(B)$

Somando sobre todos os índices i;

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{m} m_i \cdot \mathrm{Vol}(B)}_{\substack{\| \\ s(f;P)}} \leq \underbrace{\sum_{i=1}^{m} M_i \cdot \mathrm{Vol}(B)}_{S(f;P)}.$$

$\square$.