CÁLCULO 3, TURMA T3.

11/05/26 - AULA 18

No final da aula passada introduzimos os conceitos de MÁXIMO e MÍNIMO (local e absoluto/global).

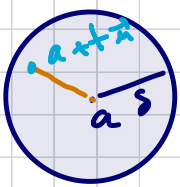
Estes pontos são chamados de <u>extremos</u>

No que que segue apresentaremos alguns resultados e exemplos.

<u>PROPOSIÇÃO</u>(*): Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e $a \in int(\Omega)$. Se a for um ponto extremo de f, então $\nabla f(a) = \vec{0}$.

<u>DEMONSTR.</u>: Como f é diferenciável em $a \in int(\Omega)$.
Seja $\delta > 0$ e considere $B_\delta(a) \subset \Omega$.

Seja $t \in \mathbb{R}$, com $|t| < \delta$. Então, para $\vec{u} \in \mathbb{R}^m$ com $\|\vec{u}\| = 1$. temos que $a + t\vec{u} \in B_\delta(a)$.



(*) A versão a uma variável desse resultado é:
"Se $f: X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ for um ponto extremo e derivável em $a \in int(X)$, então $f'(a) = 0$."

Como $a \in int(\Omega)$ é um ponto extremo, sem perda de generalidade, assuma que seja um ponto de máximo.

Logo, $\quad f(x) \leq f(a) \quad , \forall x \in B_\delta(a).$

Em particular $\quad f(a+t\vec{u}) \leq f(a).$

Assim:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a) = \lim_{t \to 0^+} \frac{\overbrace{f(a+t\vec{u}) - f(a)}^{\leq 0}}{\underbrace{t}_{>0}} \leq 0 \qquad (I)$$

Por outro lado,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a) = \lim_{t \to 0^-} \frac{\overbrace{f(a+t\vec{u}) - f(a)}^{\leq 0}}{\underbrace{t}_{<0}} \geq 0 \qquad (II)$$

Como f é diferenciável em a, valem (I) e (II) simultaneamente, ou seja,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a) \leq 0 \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a) \geq 0$$

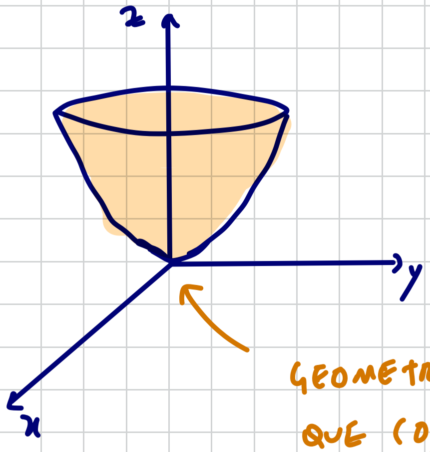
Logo, $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a) = 0$; e como

$$0 = \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a) = \nabla f(a) \cdot \vec{u},$$

como $\vec{u} \neq \vec{0}$ (pois $\|\vec{u}\| = 1$),

segue que $\boxed{\nabla f(a) = \vec{0}.}$

Ex: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + y^2$. (paraboloide)



GEOMETRICAMENTE VEMOS QUE $(0,0)$ É UM PONTO EXTREMO (NO CASO, UM PONTO DE MÍNIMO)

Verifiquemos a proposição para este exemplo. f é diferenciável pois as derivadas parciais

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y,$$

que são contínuas.

Então, como $(0,0)$ é ponto de extremo, então,

$$\nabla f(0,0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \right) =$$

$$= \left(2x \Big|_{(0,0)}, 2y \Big|_{(0,0)} \right) = (0,0)$$

$$\Rightarrow \nabla f(0,0) = (0,0) = \vec{0}.$$

Obs: A recíproca da proposição provada acima, em geral, é falsa. Ou seja, o fato de que $\nabla f(a) = \vec{0}$, não é garantia de que o ponto $a \in \text{int}(\Omega)$ seja um ponto extremo. Por exemplo:

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x^2 - y^2$$

(hiperbolóide)

Neste caso, $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$

$$\nabla f = (2x, -2y)$$

Então $\nabla f(0,0) = (2.0, -2.0) = (0,0) = \vec{0}$.

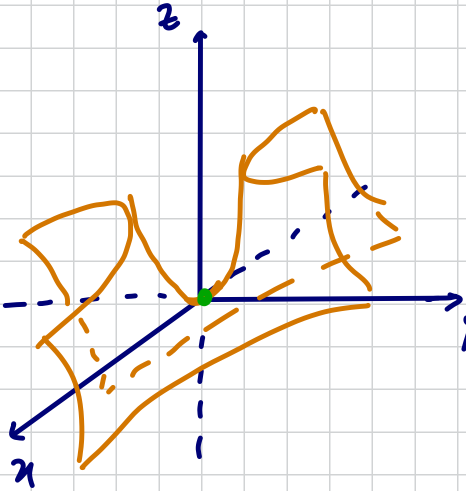
Mas, $(0,0)$ não é ponto extremo. (será o que chamaremos de PONTO DE SELA)

$k = z = x^2 - y^2$

$x^2 - y^2 = k$.

(HIPÉRBOLES

$\begin{cases} k > 0 \to \text{eixo real } x \\ k < 0 \to \text{eixo real } y \end{cases}$



Def.: Dizemos que um ponto $a \in \Omega$ é um ponto crítico de $f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, f diferenciável, se $\nabla f(a) = \vec{0}$.

EXEMPLOS: Ache os pontos críticos das funções a seguir:

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + 4xy - y^2 - 8x - 6y$

SOLUÇÃO: Queremos encontrar os pontos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

tais que $\nabla f(x,y) = \vec{0}$. Assim:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

$$\nabla f = (2x + 4y - 8, \; 4x - 2y - 6)$$

Logo:

$$\nabla f = \vec{0} \iff$$

$$\begin{cases} 2x + 4y - 8 = 0 \\ 4x - 2y - 6 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

$$y = 2x - 3$$

$$x + 2y = 4$$

$$x + 2(2x - 3) = 4$$

$$x + 4x - 6 = 4$$

$$5x = 10$$

$$\boxed{x = 2}$$

$$y = 2x - 3$$

$$y = 2.(2) - 3$$

$$\boxed{y = 1}$$

Logo, f possui apenas um ponto crítico, em $A(2,1)$.

(b) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$; $f(x,y) = x + y\cdot \operatorname{sen} x$.

PONTOS CRÍTICOS: onde $\nabla f = \vec{0}$.

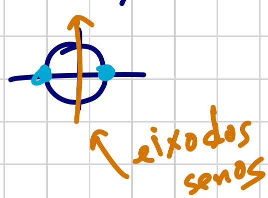
$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\nabla f = \left(1 + y\cos x, \operatorname{sen} x\right)$$

Assim, $\nabla f = \vec{0} \iff (1+y\cos x, \operatorname{sen}x) = (0,0)$

$$\iff \begin{cases} 1+y\cos x = 0 \\ \underbrace{\operatorname{sen} x = 0} \end{cases} \longrightarrow x = k\pi + 0$$

$x = k\cdot\pi$, $\forall k\in\mathbb{Z}$.



Daí:

$$1 + y\cdot\cos x = 0$$

$$1 + y\cdot\underbrace{\cos(k\pi)}_{\pm 1} = 0$$

$$1\pm y = 0 \longrightarrow \begin{cases}1+y=0 \Rightarrow y=-1\\ 1-y=0\Rightarrow y=1.\end{cases}$$

Pontos críticos: $(x,y) = (k\pi, -1)$ ou $(k\pi, 1)$, $k\in\mathbb{Z}$. (infinitos pontos críticos)

No que segue apresentaremos um resultado que permite classificar os pontos extremos.

Antes, porém, vamos definir o conceito de MATRIZ HESSIANA.

Def.: Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável, com as derivadas parciais segundas contínuas.

Definimos a matriz Hessiana $H(x,y)$ por:

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

Obs.: Este conceito se extende para mais variáveis: $f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, com as derivadas segundas contínuas, então:

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_m} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_2} & \cdots & & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_m^2} \end{bmatrix}_{m \times m}$$

Frente a este conceito, podemos enunciar o resultado principal:

TEOREMA: (TESTE DA DERIVADA SEGUNDA) Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $a \in \operatorname{int}(\Omega)$ com as derivadas parciais segundas contínuas, com a um ponto crítico de f. Então:

(i) Se $\det(H(a)) > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) > 0$, então a é um ponto de mínimo relativo.

(ii) Se $\det(H(a)) > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) < 0$, então a é um ponto de máximo relativo.

(iii) Se $\det(H(a)) < 0$, então a é um ponto de sela.

(iv) Se $\det(H(a)) = 0$, não segue nada.

DEMONSTR.: Pode ser encontrada, por exemplo, no livro do LEITHOLD, VOL 2. $\square$

Vejamos exemplos de aplicação:

<u>EXERCÍCIO</u>: De cada função abaixo, encontre os pontos críticos, classificando-os.

(a) $f(x,y) = x^2 - y^2$

<u>SOLUÇÃO</u>: PONTOS CRÍTICOS: onde $\nabla f = \vec{0}$.

$$\nabla f = (2x, -2y)$$

$$\nabla f = \vec{0} \iff (2x, -2y) = (0,0)$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(2x) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 \qquad (\text{T. de SCHWARZ})$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(-2y) = -2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2x) = 2$$

Assim, temos:

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow H(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\det H(0,0) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2.(-2) - 0.0$$

$$\det(H(0,0)) = -4 < 0.$$

Logo, $(0,0)$ é um ponto de sela.

(b) $f(x,y) = 2x^4 + y^2 - x^2 - 2y.$

pontos críticos: onde $\nabla f = \vec{0}$.

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\Rightarrow \nabla f = (8x^3 - 2x,\ 2y - 2)$$

$$\nabla f = \vec{0} \Leftrightarrow (8x^3-2x, 2y-2) = (0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x^3-2x=0 \Rightarrow 2x(4x^2-1)=0 \\ 2y-2=0 \Rightarrow \boxed{y=1} \end{cases}$$

$$2x(4x^2-1)=0 \Leftrightarrow x=0 \quad 4x^2=1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x=0} \quad \boxed{x=\pm\frac{1}{2}}$$

PONTOS CRÍTICOS:

$$A(0,1) \; ; \; B\left(\frac{1}{2},1\right) ; \; C\left(-\frac{1}{2},1\right).$$

• matriz hessiana: $H(x,y) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$;

onde:

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(8x^3-2x\right) = 24x^2-2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 8x^3-2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y-2$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(8x^3-2x\right) = 0$$

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2y-2\right) = 0$$

$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(2y-2\right) = 2$$

Assim: $H(x,y) = \begin{bmatrix} 24x^2-2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Verifiquemos para cada ponto crítico:

- $A(0,1)$: $\quad H(0,1) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \det\left(H(0,1)\right) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4 - 0 = -4 < 0$$

Logo, $A(0,1)$ é um ponto de sela.

- $B\left(\frac{1}{2}, 1\right)$: $\quad H\left(\frac{1}{2}, 1\right) = \begin{bmatrix} 24\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \det\left(H\left(\tfrac{1}{2}, 1\right)\right) = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 0 = 8 > 0.$$

(temos um ponto extremo)

Assim,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{1}{2},1\right) = 24\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 = 4 > 0$$

Logo, $B\left(\frac{1}{2},1\right)$ é um ponto de mínimo.

• $C\left(-\frac{1}{2},1\right)$: $H\left(-\frac{1}{2},1\right) = \begin{bmatrix} 24\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

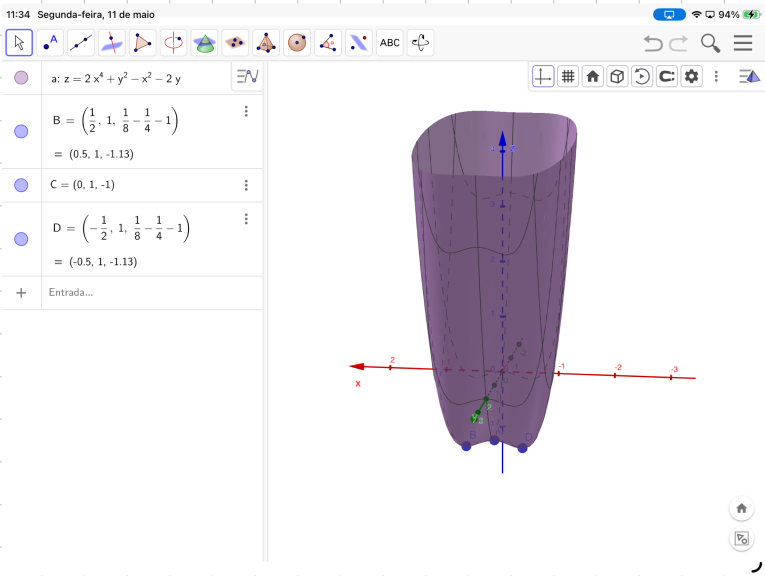
$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det\left(H\left(-\frac{1}{2},1\right)\right) = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 0 = 8 > 0$$

Logo, $C\left(-\frac{1}{2},1\right)$ é um ponto extremo.

Assim: $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(-\frac{1}{2},1\right) = 24\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 2 = 4 > 0.$$

Então, $C\left(-\frac{1}{2},1\right)$ também é um ponto de mínimo.



(c) $f(x,y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \operatorname{sen}(x+y)$

Resp.: $x = y = \frac{\pi}{3}$ dá máx.