CÁLCULO 3, TURMA T3

$\boxed{08/05/26 - \text{AULA } 17}$

Na aula passada estudamos o conceito de derivada direcional. $f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ diferenciável em $a \in \operatorname{int}(\Omega)$; $\vec{u} \in \mathbb{R}^m$ com $\|\vec{u}\| = 1$. Então; definimos

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t.\vec{u}) - f(a)}{t}$$

Vimos também que esta derivada direcional pode ser calculada por:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a) = (d_a f)(\vec{u}) = \nabla f(a) . \vec{u}$$

PRODUTO ESCALAR.

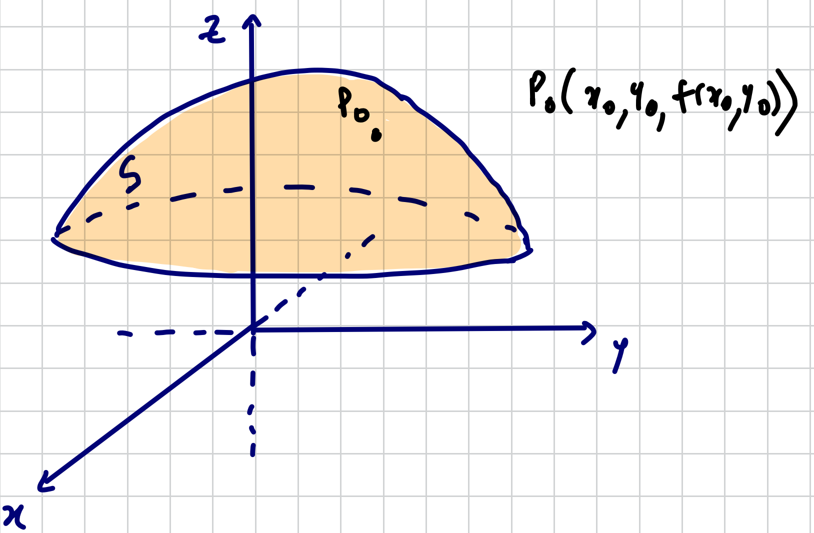
$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) , \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) , \dots , \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) \right)$$

Vimos também que a máxima taxa de variação se dá em ∇f seu valor é $\|\nabla f\|$ e na mesma direção de $\vec{u}$.

PLANO TANGENTE A UMA SUPERFÍCIE DO $\mathbb{R}^3$.

Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $z = f(x,y)$ uma função escalar de duas variáveis reais. O seu gráfico é uma superfície S no $\mathbb{R}^3$. Seja $P_0(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ um ponto sobre a superfície S do gráfico de f.

Queremos obter a equação do plano (π) tangente à superfície S no ponto P_0.



Como $z = f(x,y)$, então $f(x,y) - z = 0$

Assim, define a função $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$F(x,y,z) = f(x,y) - z \; ;$$

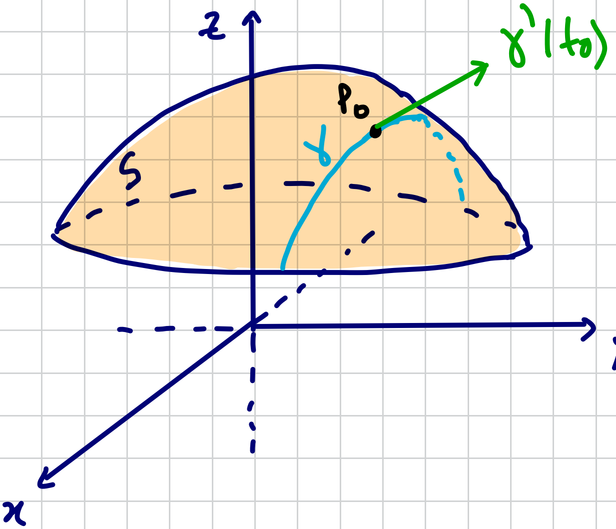
que fornece a superfície S (como domínio)

Seja $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ uma curva qualquer sobre S que passa pelo ponto P_0;

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) .$$

Então, $\exists\, t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $P_0 = \gamma(t_0)$; i.e.;

$$P_0 = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$$



O vetor tangente à γ em P_0 é dado por $\gamma'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$

Parametrizando F em γ, temos:

$$F(\gamma(t)) = F(x(t), y(t), z(t)) = 0$$

Assim, pela regra da cadeia, temos:

$$\left.\left(\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}\right)\right|_{t_0}=0$$

$$\underbrace{\left.\left(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right)\right|_{t_0}}_{\nabla F(P_0)}\cdot\underbrace{\left.\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt},\frac{dz}{dt}\right)\right|_{t_0}}_{\gamma'(t_0)}=0$$

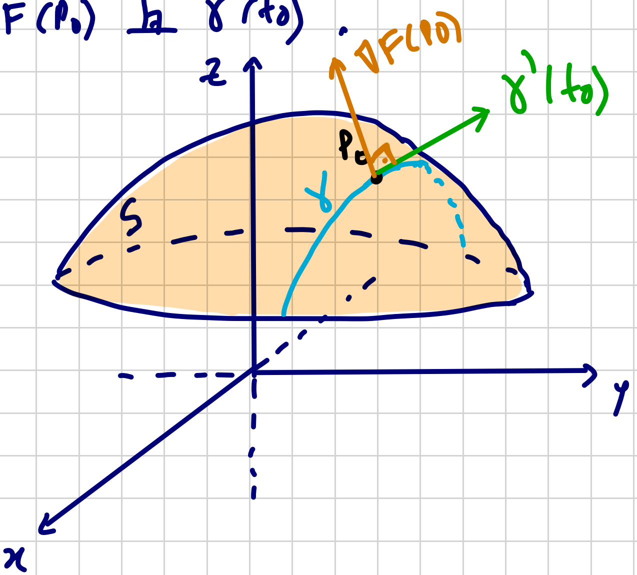
RECORDE DA ALGA
QUE SE $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$
ENTÃO $\vec{u}\perp\vec{v}$

$\Rightarrow \nabla F(P_0)\cdot\gamma'(t_0)=0$

PRODUTO ESCALAR.

conclusão: $\nabla F(P_0)$ é ortogonal à $\gamma'(t_0)$,

i.e; $\nabla F(P_0)\perp\gamma'(t_0)$.



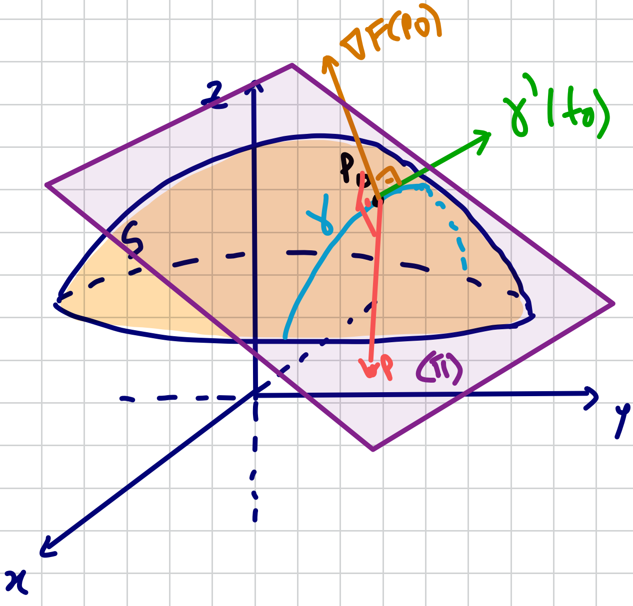
Seja (π) o plano tangente à superfície S no ponto P_0. Logo, (π) é paralelo à $\gamma'(t_0)$; mas perpendicular a $\nabla F(P_0)$.

Assim, o vetor normal ao plano (π) será $\nabla F(P_0)$.

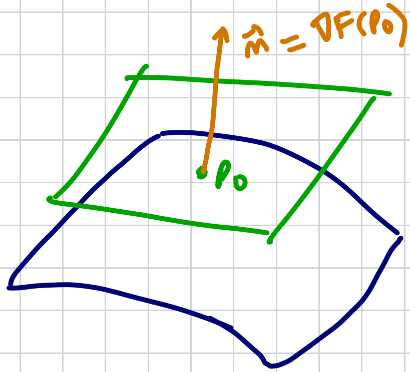
Seja $P(x, y, z)$ um outro ponto qualquer sobre o plano (π). Assim, o vetor $\overrightarrow{P_0 P} = P - P_0$ pertence a (π), e, então,

$$\nabla F(P_0) \cdot \overrightarrow{P_0 P} = 0,$$

que fornece a equação do plano (π).



Ex: Encontre a equação do plano tangente à superfície dada por $f(x,y) = (x+1)^2 + y\cos x$ no ponto $P_0(0,1)$



solução:

Seja $F(x,y,z) = f(x,y) - z$

$$F(x,y,z) = (x+1)^2 + y.\cos x - z.$$

Assim:

$$\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right)$$

$$\nabla F = \left(2(x+1) - y\,\mathrm{sen}\,x,\ \cos x,\ -1 \right)$$

$$P_0(x_0, y_0, f(x_0,y_0)) = (0, 1, f(0,1)) = (0, 1, 2)$$

$$f(x,y) = (x+1)^2 + y\cos x$$

$$f(x,y) = 1^2 + 1.\cos 0 = 2$$

Assim:

$$\vec{n} = \nabla F(P_0) = \nabla F(0,1,2) = (2.(0+1) - 1 \,\text{sen}\, 0, \cos 0, -1)$$

$$= (2, 1, -1)$$

Disso, dado $P(x,y,z) \in (\pi)$, então a equação do plano (π) será dada por:

$$(\pi): \nabla F(P_0) . \overrightarrow{P_0 P} = 0 \quad ;$$

com $\overrightarrow{P_0 P} = P - P_0$
$= (x,y,z) - (0,1,2)$
$= (x, y-1, z-2)$

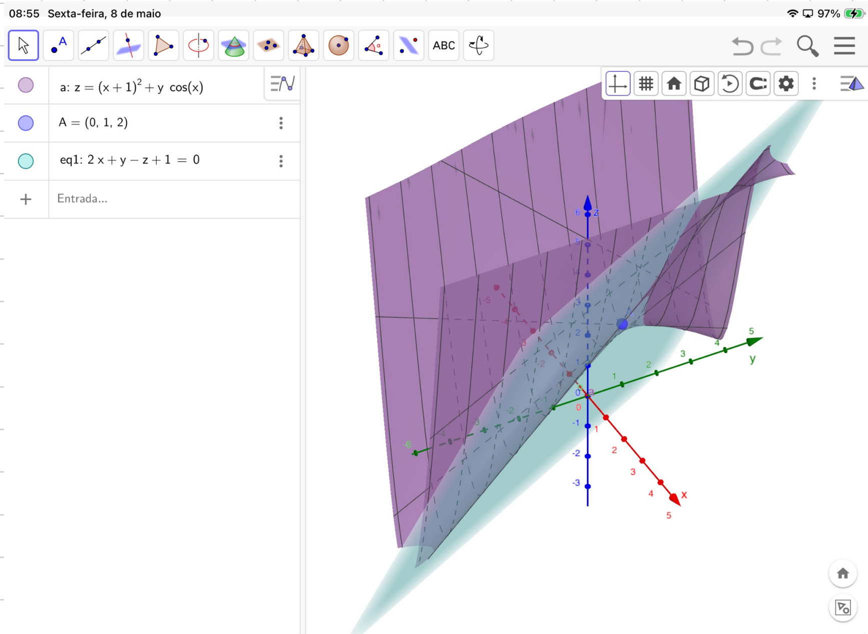
$$(\pi): (2,1,-1).(x, y-1, z-2) = 0$$

$$(\pi): 2x + 1.(y-1) + (-1).(z-2) = 0$$

$$(\pi): 2x + y - z - 1 + 2 = 0$$

$$\boxed{(\pi): 2x + y - z + 1 = 0}$$

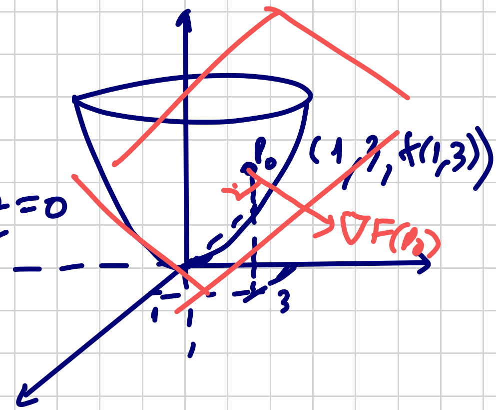
eq. do plano tangente à superfície do gráfico de f no ponto P_0.



02) Obter a equação do plano tangente à superfície dada por $f(x,y) = x^2 + y^2$ no ponto $P_0\left(1, 3, \underbrace{10}_{f(1,3)}\right)$

Solução:

$$z = f(x,y) \Rightarrow \underbrace{f(x,y) - z}_{F} = 0$$



$$F(x,y,z) = f(x,y) - z$$

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$$

$$\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right)$$

$$\Rightarrow \nabla F = (2x, 2y, -1)$$

$$\Rightarrow \nabla F(P_0) = (2.(1), 2.(3), -1) = (2, 6, -1)$$

Dado $P(x, y, z) \in (\pi)$, então

$$\overrightarrow{P_0P} = P - P_0$$

$$\overrightarrow{P_0P} = (x, y, z) - (1, 3, 10)$$

$$\overrightarrow{P_0P} = (x-1, y-3, z-10).$$

Assim, a equação do plano (π) será dada por:

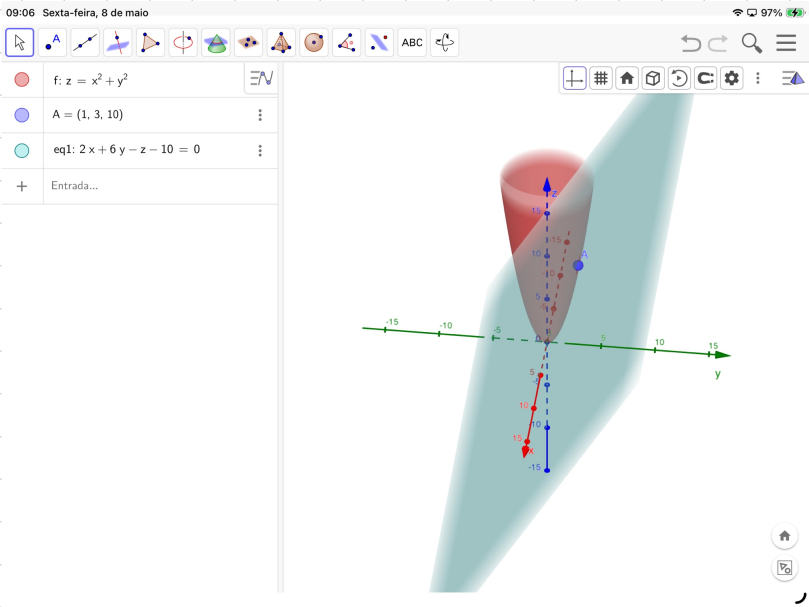
$$(\pi): \quad \nabla F(P_0) \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$$

$$(\pi): \quad (2, 6, -1) \cdot (x-1, y-3, z-10) = 0$$

$$(\pi): \quad 2(x-1) + 6.(y-3) - 1.(z-10) = 0$$

$$(\pi): \quad 2x + 6y - z - 2 - 18 + 10 = 0$$

$$\boxed{(\pi): \quad 2x + 6y - z - 10 = 0}$$



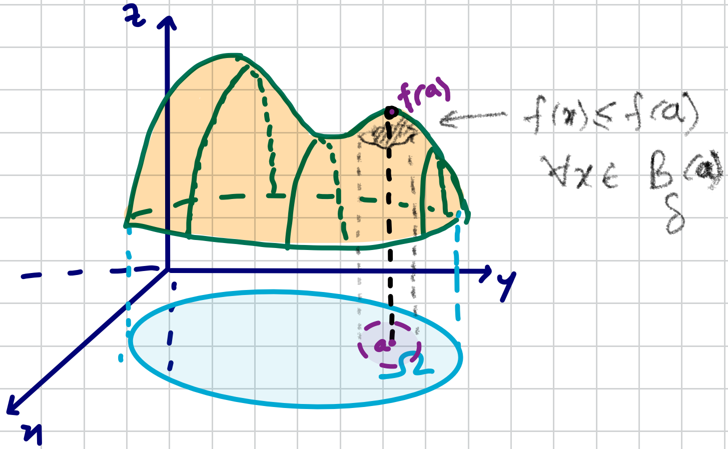
MÁXIMOS E MÍNIMOS:

No que segue, estudaremos conceitos sobre máximos e mínimos, de forma a estender para funções de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$ os resultados que outrora foram estudados para funções de uma variável real no cálculo 1.

Def.: Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função escalar e $a \in \text{int}(\Omega)$. Dizemos que o ponto a é um ponto de MÁXIMO LOCAL se $\exists\, \delta > 0$ tal que

$$f(a) \geq f(x) \quad , \quad \forall x \in B_\delta(a).$$

ILUSTRAÇÃO PARA O CASO DE $\mathbb{R}^2$ EM $\mathbb{R}$:



Def.: Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função escalar e $a \in \text{int}(\Omega)$. Dizemos que o ponto a é um ponto de MÍNIMO LOCAL se $\exists\, \delta > 0$ tal que

$$f(a) \leq f(x) \quad , \quad \forall x \in B_\delta(a).$$

Def.: Dizemos que um ponto $a \in \Omega$ é um ponto de MÁXIMO ABSOLUTO para $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ se $f(a) \geq f(x)$, $\forall x \in \Omega$. Dizemos que $a \in \Omega$ é um ponto de MÍNIMO ABOLUTO para $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ se $f(a) \leq f(x)$, $\forall x \in \Omega$.

Def.: Um ponto de MÁXIMO ou MÍNIMO é chamado de PONTO EXTREMO (EXTREMO RELATIVO, se for máx. ou mín. relativo ou ETREMO ABOLUTO se for máx. ou mín. absoluto). Neste caso, o valor $f(a)$ chama-se VALOR EXTREMO.

Na próxima aula estudaremos propriedades e classificações dos extremos.