CÁLCULO 3, TURMA T3

06/05/25 - AULA 16

DERIVADA DIRECIONAL

Def.: Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função escalar. Dado $a \in \text{int}(\Omega)$, definimos a derivada de f no ponto a, na direção de um vetor unitário $\vec{u}$ (ou seja, tal que $\|\vec{u}\| = 1$), por:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t.\vec{u}) - f(a)}{t}$$

No caso de f de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$, considerando $\vec{u} = \vec{i} = (1,0)$, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{i}} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t.\vec{i}) - f(a)}{t}$$; sendo

$a = (x,y)$; então:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{i}} = \lim_{t \to 0} \frac{f((x,y) + t.(1,0)) - f(x,y)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(x+t, y) - f(x,y)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Conclusão: $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{i}} = \dfrac{\partial f}{\partial x}$

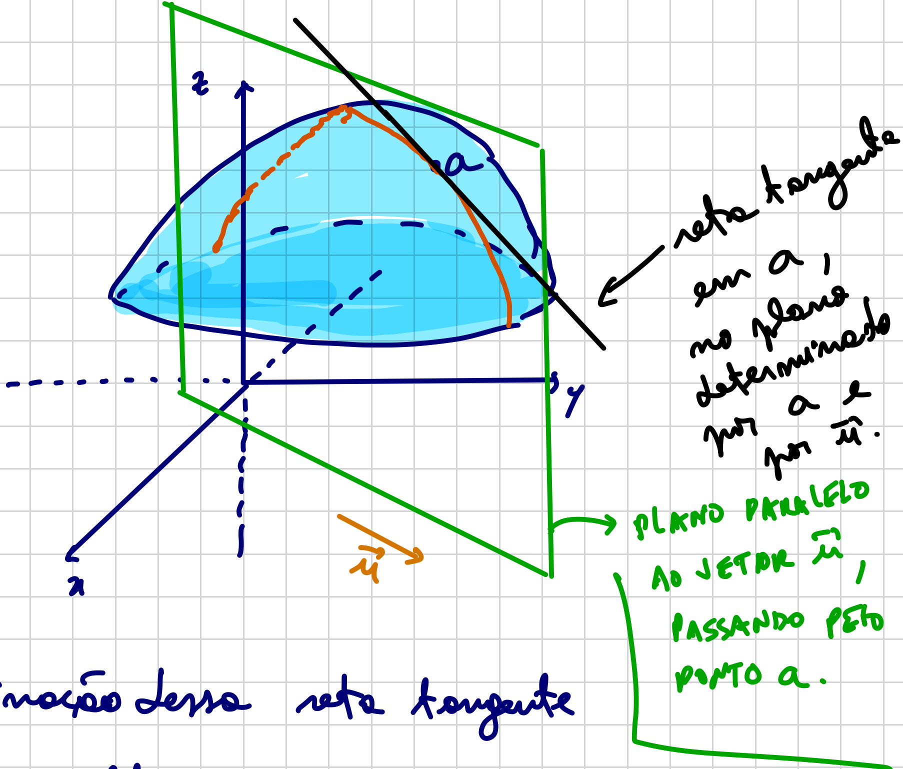
Do mesmo modo se conclui que

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{j}} = \frac{\partial f}{\partial y} \quad ; \text{ onde } \vec{j} = (0,1).$$

Assim, $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a)$ fornece a taxa de variação na direção da combinação linear dos vetores da base do $\mathbb{R}^n$ que geram $\vec{u}$; onde $\vec{u}$ é um vetor unitário.

SIGNIFICADO GEOMÉTRICO DA DERIVADA DIRECIONAL:

Seja $z = f(x,y)$ uma função de $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; e $a \in \text{int}(\Omega)$. Tome $\vec{u}$ tal que $\|\vec{u}\| = 1$. Então, $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a)$ fornece a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto a, paralelo ao vetor $\vec{u}$.



A inclinação dessa reta tangente é dada por $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a)$.

Vejamos um exemplo de cálculo de derivada direcional.

Ex.: Dada $f(x,y) = x^2 y$, determine $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,3)$, sendo $\vec{u} = \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

Solução: Note que $\vec{u}$ é unitário, pois:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1.$$

Assim, teremos:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,3) = \lim_{t \to 0} \frac{f\left((1,3)+t.\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)\right) - f(1,3)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}t, +3+\frac{1}{2}t\right) - (1^2 . 3)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}t\right)^2 . \left(3 + \frac{1}{2}t\right) - 3}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\left(1 - \sqrt{3}t + \frac{3}{4}t^2\right)\left(3 - \frac{1}{2}t\right) - 3}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\cancel{3} - 3\sqrt{3}t + \frac{9}{4}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{\sqrt{3}}{2}t^2 - \frac{3}{8}t^3 \cancel{-3}}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\cancel{t}.\left(-3\sqrt{3} + \frac{9}{4}t - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{3}{8}t^2\right)}{\cancel{t}}$$

$$= -3\sqrt{3} - \frac{1}{2}$$

02) Dada $f(x,y) = xy^2 + x$, calcule

$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}$; sendo $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

[ou seja, queremos a função derivada direcional, pois agora o ponto está "livre"]

Solução: Note que $\|\vec{u}\| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1$.

Assim:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x,y) = \lim_{t \to 0} \frac{f((x,y) + t\vec{u}) - f(x,y)}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f\left((x,y) + t \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) - f(x,y)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}t, y + \frac{\sqrt{2}}{2}t\right) - f(x,y)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}t\right)\left(y + \frac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2 + x + \frac{\sqrt{2}}{2}t - \left[xy^2 + x\right]}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}t\right)\cdot\left(y^2 + \sqrt{2}\,t\,y + \frac{1}{2}t^2\right) + x + \frac{\sqrt{2}}{2}t - xy^2 - x}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\cancel{xy^2} + \sqrt{2}\,t\,xy + \frac{1}{2}t^2x + \frac{\sqrt{2}}{2}t\,y^2 + 1.\,t^2y + \frac{\sqrt{2}}{4}t^3 + \cancel{x} + \frac{\sqrt{2}}{2}t - \cancel{xy^2} - \cancel{x}}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\cancel{t}\cdot\left(\sqrt{2}\,xy + \frac{1}{2}t\,x + \frac{\sqrt{2}}{2}y^2 + t\,y + \frac{\sqrt{2}}{4}t^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\cancel{t}}$$

$$= \lim_{t \to 0} \sqrt{2}\,xy + \underbrace{\cancel{\frac{1}{2}t\,x}}_{0} + \frac{\sqrt{2}}{2}y^2 + \underbrace{\cancel{t\,y}}_{0} + \underbrace{\cancel{\frac{\sqrt{2}}{4}t^2}}_{0} + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \sqrt{2}\,xy + \frac{\sqrt{2}}{2}y^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{u}} = \sqrt{2}\,xy + \frac{\sqrt{2}}{2}y^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

O cálculo da derivada direcional resume-se a um cálculo de limite, que na maioria das vezes é trabalhoso. Felizmente, tem uma forma mais simples de calcular, conforme o teorema a seguir.

TEOREMA: Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e seja $\vec{u}$ tal que $\|\vec{u}\| = 1$. Então, dado $a \in \operatorname{int}(\Omega)$, tem-se que

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a) = f'(a) \cdot \vec{u} .$$

PRODUTO ESCALAR

Obs.: $f'(a) \cdot \vec{u} = d_a f(\vec{u})$.

DEMONSTR. DO TEOREMA: Como f é diferenciável em $a \in \operatorname{int}(\Omega)$, dado $h \in \mathbb{R}^m$ tal que $a + h \in \operatorname{int}(\Omega)$, então:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + \|h\| \cdot r(h) ;$$

$$\text{onde } r(h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0 .$$

Em particular, tome $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$h = t \cdot \vec{u} .$$

Assim:

$$f(a+h) = f(a + t\vec{u}), \text{ e então:}$$

$$f(a+h) - f(a) = f(a+tu) - f(a) = f'(a) \cdot (t\vec{u}) + \|t\vec{u}\| r(t\vec{u})$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+t\vec{u}) - f(a)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f'(a).(t\vec{u}) + \|t\vec{u}\|.\, r(t\vec{u})}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{t}.\, f'(a).\, \vec{u}}{\cancel{t}} + \frac{\underbrace{|\cancel{t}|}_{\pm 1}.\, \|\vec{u}\|.\, r(t\vec{u})}{\cancel{t}}$$

$$= f'(a).\vec{u} \pm \lim_{t\to 0} 1.\, \underbrace{\|\vec{u}\|}_{\text{UNITÁRIO}}.\, \underbrace{r(t\vec{u})}_{r(0)=0} = f'(a).\vec{u}.$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{u}} = f'(a).\vec{u}.$$

$\square$

Obs.: Além disso, como $f'(a).\vec{u} = (d_a f)(\vec{u})$,

e como $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^1$, então,

$$[d_a f]_{1\times m} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_m} \end{bmatrix}_{1\times m}.$$

Inspirados nessa observação, podemos definir:

Def.: Dada $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, definimos o vetor gradiente de f por:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m} \right),$$

se estas derivadas parciais existirem.

Assim, o teorema anterior fornece o seguinte resultado:

COROLÁRIO: Se $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ for diferenciável, então, para $\vec{u}$ tal que $\|\vec{u}\| = 1$, tem-se que

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}} = \nabla f \cdot \vec{u} \qquad [\text{PRODUTO ESCALAR}]$$

DEMONSTR.: De facto, basta notar que, $\forall a \in \operatorname{int}(\Omega)$,

PRODUTO MATRICIAL

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a) = f'(a) \cdot \vec{u} = (d_a f)(\vec{u}) =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot u_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot u_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \cdot u_m =$$

$$= \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(a)\right)}_{\nabla f} \cdot \underbrace{(u_1, u_2, \dots, u_m)}_{\vec{u}}$$

$$= \nabla f(a) \cdot \vec{u}$$

$\square$

<u>Ex.</u>: Dada $f(x,y) = xy^2 + x$, calcule $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}$; sendo $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. [<u>Obs</u>: É o mesmo exemplo dado anteriormente, usando apenas a definição com o limite].

<u>Solução</u>: $\|\vec{u}\| = 1$ (já verificado). Assim:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}} = \nabla f \cdot \vec{u}, \quad \text{onde}$$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (y^2+1, 2xy).$$ Assim:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}} = \nabla f \cdot \vec{u} = (y^2+1, 2xy) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$

$$= (y^2+1)\frac{\sqrt{2}}{2} + \cancel{2}xy\cdot\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}y^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}xy$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{u}} = \frac{\sqrt{2}}{2}y^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}xy$$

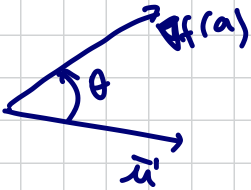
A derivada direcional representa uma taxa de variação. Quando ela é máxima?

TEOREMA: A taxa de variação será máxima no ∇f, e seu valor será $\|\nabla f\|$, na mesma direção do vetor $\vec{u}$.

DEMONSTRAÇÃO: Basta observar que; $\forall\, a \in \text{int}(\Omega)$

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a)}_{\text{TAXA DE VARIAÇÃO}} = \nabla f(a)\cdot\vec{u} = \|\nabla f(a)\|\cdot\underbrace{\|\vec{u}\|}_{=1}\cdot\cos\theta,$$

onde θ é o ângulo formado por $\nabla f(a)$ e $\vec{u}$.

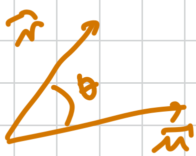


$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a) = \|\nabla f(a)\| \cdot \cos\theta ,$$

e esse valor é máximo quando $\cos\theta = 1$; ou seja, quando $\theta = 0°$, i.e, ∇f tem a mesma direção que $\vec{u}$.

$\square$

obs: RECORDE DA ALGA I



$$\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}$$

$$\Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos\theta .$$

Vejamos um exemplo de aplicação desse resultado.

Ex.: Seja $f(x,y) = x \cdot e^{y}$.

(a) Determine a taxa de variação de f no ponto $P(2,0)$ na direção de P ao ponto $Q(\frac{1}{2}, 2)$.

(b) Em que direção f tem a máxima taxa de variação? Qual é essa máxima taxa de variação?

Solução:

(a) $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(P)$; onde $\vec{u} = \dfrac{\vec{PQ}}{\|\vec{PQ}\|}$ (pois $\vec{u}$ deve ser unitário)

$$\vec{PQ} = Q - P = \left(\frac{1}{2}, 2\right) - (2,0) = \left(-\frac{3}{2}, 2\right)$$

$$\Rightarrow \|\vec{PQ}\| = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + (2)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + 4}$$

$$= \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \vec{u} = \frac{1}{\|\vec{PQ}\|} \cdot \vec{PQ} = \frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{3}{2}, 2\right) = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

Queremos $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(P)$; onde

$\frac{\partial f}{\partial u} = \nabla f \cdot \vec{u}$; sendo que ; para $f(x,y) = x.e^y$,

tem-se:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \left(e^y, x.e^y \right)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\nabla f(P)} = \nabla f(2,0) = (e^0, 2.e^0) = \underbrace{(1,2)}$$

Assim:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(P) = \nabla f(P). \vec{u} = (1,2).\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

$$= 1.\left(-\frac{3}{5}\right) + 2.\left(\frac{4}{5}\right) = -\frac{3}{5} + \frac{8}{5} = 1.$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(P) = 1.}$$

(b) Conforme o teorema anterior, ela é máxima em ∇f, e na mesma direção do vetor $\vec{u} = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$. Essa máxima taxa será $\|\nabla f(P)\|$, ou seja:

$$\underbrace{\|\nabla f(P)\|} = \|(1,2)\| = \sqrt{(1)^2 + (2)^2} = \underbrace{\sqrt{5}}$$