CÁLCULO 3, TURMA T2: 29/05/26 — AULA 26

Seguindo com mais exemplos de integrais múltiplas.

05) Calcule $\displaystyle\int_0^1\int_{3y}^3 e^{x^2}\,dx\,dy$.

Solução:

$$\int_{y=0}^{y=1}\int_{x=3y}^{x=3} e^{x^2}\,dx\,dy$$

$$\int e^u\,du = e^u + C$$

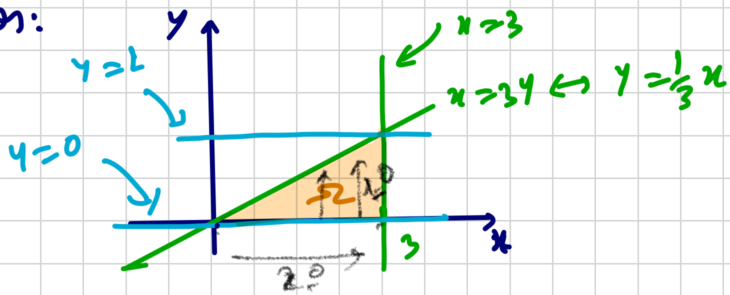
$$u = x^2 \Rightarrow du = 2x\,dx$$

FALTA x

O problema neste caso consiste no fato de que não é possível calcular

$$\int e^{x^2}\,dx$$

A saída para resolver esse impasse é trocar a ordem de integração. Desenhando a região Ω, temos:



$$\int_{y=0}^{y=1}\int_{x=3y}^{x=3} e^{x^2}\,dx\,dy = \int_{x=0}^{x=3}\left(\int_{y=0}^{y=\frac{1}{3}x} \underbrace{e^{x^2}}_{\text{CONSTANTE PARA } y}\,dy\right)dx =$$

$$= \int_{x=0}^{x=3} e^{x^2}\left(\int_{y=0}^{y=\frac{1}{3}x} dy\right)dx = \int_{x=0}^{x=3} e^{x^2}\cdot(y)\Big|_{y=0}^{y=\frac{1}{3}x}\,dx =$$

$$= \int_{x=0}^{x=3} e^{x^2}\cdot\left(\frac{1}{3}x - 0\right)dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\int_{0}^{3} e^{\overbrace{x^2}^{u}}\cdot\underbrace{2x\,dx}_{du} =$$

$$\int e^{u}\,du = e^{u} + C$$

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2x\,dx$$

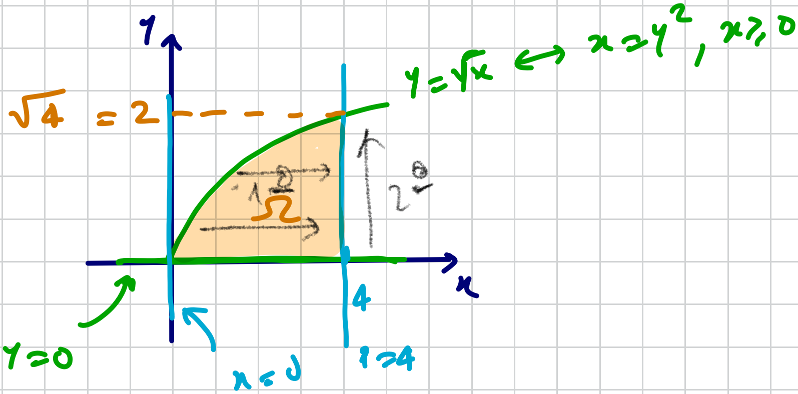
$$= \frac{1}{6}\cdot e^{x^2}\Big|_{0}^{3} = \frac{1}{6}\cdot\left(e^{(3)^2} - e^{0}\right) = \frac{1}{6}\left(e^{9} - 1\right)$$

06) Esboce a região de integração e faça a mudança de ordem de integração para

$$\int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\, dy\, dx .$$

SOLUÇÃO: Temos:

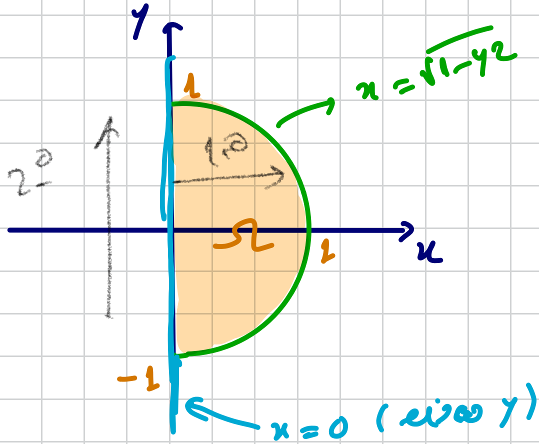
$$\int_{x=0}^{x=4} \int_{y=0}^{y=\sqrt{x}} f(x,y)\, dy dx = \int_{y=0}^{y=2} \int_{x=y^2}^{x=4} f(x,y)\, dx dy$$



07) Calcule $\iint_\Omega xy^2 dA$, onde Ω é a região limitada por $x=0$ e $x=\sqrt{1-y^2}$.

SOLUÇÃO: O desenho da região Ω é dado por:

$$x = +\sqrt{1-y^2} \Leftrightarrow x^2 = 1-y^2 \Leftrightarrow x^2+y^2=1, \quad (x \geq 0)$$



Αλλιώς; Ανάποδα:

$$\iint_{\Omega} xy^2\,dA = \int_{y=-1}^{y=1}\int_{x=0}^{x=\sqrt{1-y^2}} x\,y^2\,dx\,dy =$$

$$= \int_{y=-1}^{y=1} y^2\left(\int_{x=0}^{x=\sqrt{1-y^2}} x\,dx\right)dy = \int_{y=-1}^{y=1} y^2 \cdot \left.\frac{x^2}{2}\right|_{x=0}^{x=\sqrt{1-y^2}} dy =$$

$$= \int_{y=-1}^{y=1} y^2 \cdot \left(\frac{\left(\sqrt{1-y^2}\right)^2}{2} - \frac{0}{2}\right)dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{1} y^2(1-y^2)\,dy = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(y^2 - y^4)\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^5}{5}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \left[\frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^5}{5}\right]\right) =$$

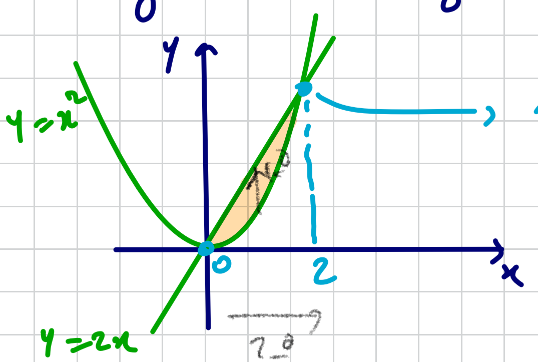
$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3} - \frac{2}{5}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{10-6}{15}$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{15} = \frac{2}{15}$$

---

08) Determine o volume do sólido que está abaixo do paraboloide $z = x^2 + y^2$ e acima da região Ω do plano xy limitada pela reta $y = 2x$ e pela parábola $y = x^2$.

Solução: A região de integração Ω é dada por:



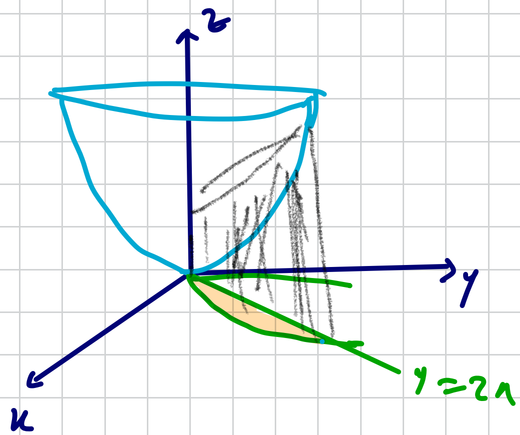
interceptos:

$$x^2 = 2x$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x(x-2) = 0$$

$$x = 0 \text{ ou } x = 2$$



$$V = \iint_{\Omega} f(x,y)\, dx\, dy =$$

pois $f \geq 0$ em Ω. ; $f(x,y) = x^2+y^2$

$$= \int_{x=0}^{x=2} \int_{y=x^2}^{y=2x} (x^2+y^2)\, dy\, dx = \int_{x=0}^{x=2} \left(x^2 \cdot y + \frac{y^3}{3} \right) \Bigg|_{y=x^2}^{y=2x} dx =$$

$$= \int_{x=0}^{x=2} x^2 \cdot (2x) + \frac{(2x)^3}{3} - \left[x^2 \cdot x^2 + \frac{(x^2)^3}{3} \right] dx$$

$$= \int_0^2 \left(\underbrace{2x^3 + \frac{8x^3}{3}} - x^4 - \frac{x^6}{3} \right) dx =$$

$$2 + \frac{8}{3} = \frac{14}{3}$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{14}{3} x^3 - x^4 - \frac{1}{3} x^6 \right) dx =$$

$$= \left(\frac{\cancel{14}^{7}}{3} \frac{x^4}{\cancel{4}_{2}} - \frac{x^5}{5} - \frac{1}{3} \frac{x^7}{7} \right) \Bigg|_0^2 =$$

$$= \left(\frac{7}{6} x^4 - \frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{21} x^7 \right) \Bigg|_0^2 =$$

$$\frac{7}{6} \cdot (2)^4 - \frac{1}{5} (2)^5 - \frac{1}{21} (2)^7 - 0 =$$

$$\frac{7}{\cancel{6}_{3}} \cdot \cancel{16}^{8} - \frac{32}{5} - \frac{128}{21} = \frac{56}{3} - \frac{32}{5} - \frac{128}{21} =$$

$$= \frac{1960 - 672 - 640}{105} = \frac{648}{105}^{\,3} = \frac{216}{35} \;//$$

ÁREA DE REGIÕES VIA INTEGRAIS DUPLAS.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ uma região J-mensurável.
Então, a medida da área A dessa região é numericamente igual à integral dupla

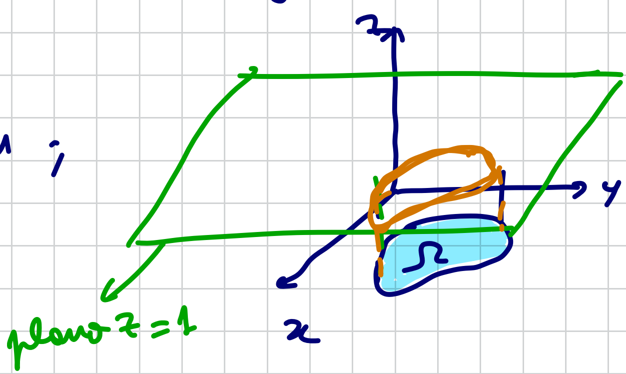
$$A = \iint_\Omega dA,$$ onde

$$dA = dx\,dy \quad \text{ou} \quad dA = dy\,dx.$$

De fato, sendo $f(x,y) = 1$, $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, então, como $f \geq 0$, o volume do sólido obtido abaixo de f e acima da região Ω será dado por:

$$V = A_b \cdot h;$$

onde A_b é a área da base do cilindro dado por Ω, e $h = 1$.



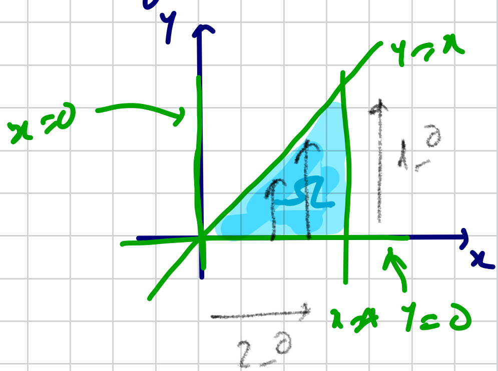
Ou seja, $V = \iint_\Omega 1\, dA =$

$$\Rightarrow \quad A \cdot 1 = \iint_{\Omega} 1 \, dA.$$

$$\Rightarrow \quad A = \iint_{\Omega} dA.$$

Ex.: Use integrais duplas para obter a área da região compreendida pelas retas: $x = 0$, $y = 0$, $x = 4$ e $y = x$.

Solução: A região Ω é dada por:

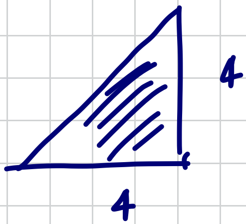


$$A = \iint_{\Omega} dA = \int_{x=0}^{x=4} \left(\int_{y=0}^{y=x} dy \right) dx =$$

$$= \int_{x=0}^{x=4} y \Big|_{y=0}^{y=x} dx = \int_{x=0}^{x=4} (x - 0) \, dx =$$

$$= \int_0^4 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^4 = \frac{(4)^2}{2} - \frac{0}{2} = 8 \text{ u.a.}$$

Obs: Neste exemplo simples podemos verificar o resultado pela geometria plana:



$$A = \frac{b.h}{2} = \frac{4.\cancel{4}^{2}}{\cancel{2}} = 8$$

No entanto, frisamos que para regiões mais "elaboradas", o cálculo de áreas via integrais duplas tornar-se-á mais apreciável.