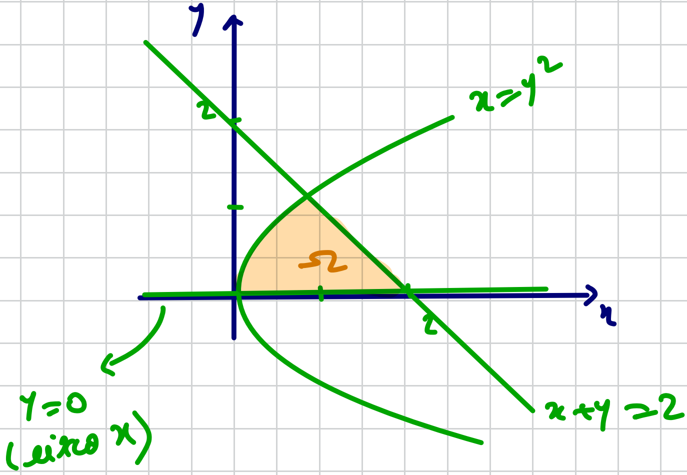
CÁLCULO 3, TURMA T2

$\boxed{27/05/26 - \text{AULA 25}}$

Seguindo o estudado sobre integrais duplas da aula passada, vejamos outros exemplos.

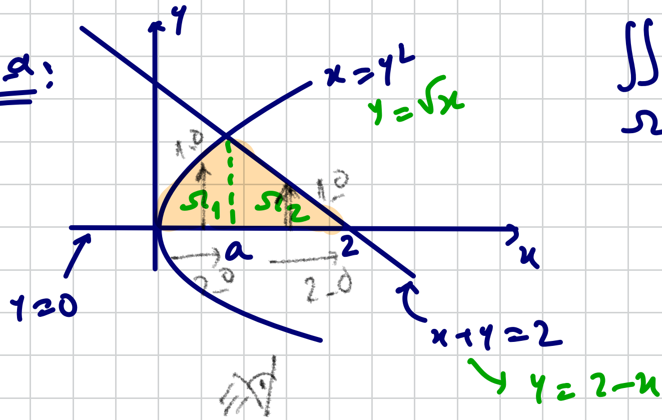
02) Calcule $\iint_{\Omega} x\sqrt{y}\,dx\,dy$, onde Ω é a região formada pelas retas $y=0$, $\underbrace{x+y=2}_{y=2-x}$ e pela parábola $x=y^2$, no 1.º quadrante.

SOLUÇÃO: Primeiramente, precisamos montar o desenho da região de integração Ω.



Este problema pode ser resolvido de duas formas:

1ª:

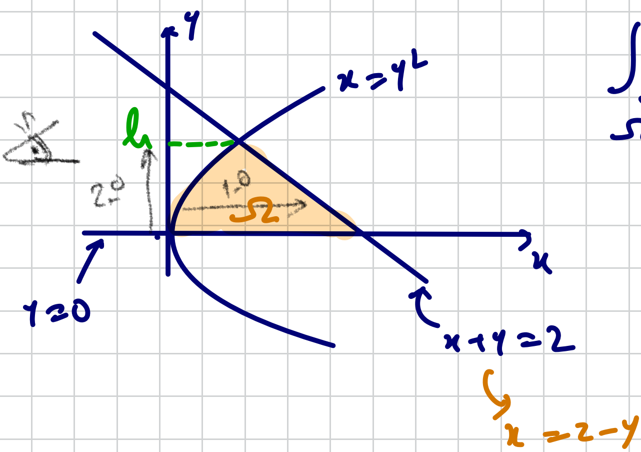


$$\iint_{\Omega} f = \iint_{\Omega_1} f + \iint_{\Omega_2} f$$

(pois $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$)

$$\Rightarrow \iint_{\Omega} f = \int_{x=0}^{x=a} \int_{y=0}^{y=\sqrt{x}} f(x,y)\, dy\, dx + \int_{x=a}^{x=2} \int_{y=0}^{y=2-x} f(x,y)\, dy\, dx$$

2ª FORMA:



$$\iint_{\Omega} f = \int_{y=0}^{y=h} \int_{x=y^2}^{x=2-y} f(x,y)\, . dx\, dy$$

Neste caso, a 2ª FORMA é a melhor abordagem pois recai em apenas uma integral dupla.

Assim:

$$\iint_\Omega f = \int_{y=0}^{y=h\,?} \int_{x=y^2}^{x=2-y} x\sqrt{y}\, dx\, dy$$

h é a ordenada da intersecção da reta $x=2-y$ com a parábola $x=y^2$

para obter o valor de h (altura), resolvemos o sistema:

$$\begin{cases} x = 2-y \\ x = y^2 \end{cases}$$

$$y^2 = 2-y$$

$$y^2+y-2=0$$

$$y = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}$$

$$y = \frac{-1\pm 3}{2}$$

$y = 1$ $\underline{\underline{1^{\circ} q}}$

$\cancel{y = -2}$

Disso, tem-se:

$$\iint_\Omega f = \int_{y=0}^{y=1} \int_{x=y^2}^{x=2-y} x\underbrace{\sqrt{y}}_{\text{CONSTANTE PARA } x}\, dx\, dy = \int_{y=0}^{y=1} \sqrt{y}\underbrace{\left(\int_{x=y^2}^{x=2-y} x\, dx\right)}_{\text{FUNÇÃO DE } y.} dy =$$

$$= \int_{y=0}^{y=1} \sqrt{y}\left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{x=y^2}^{x=2-y} dy = \int_{y=0}^{y=1} \sqrt{y}\cdot\left(\frac{(2-y)^2}{2} - \frac{(y^2)^2}{2}\right)dy =$$

$$= \int_0^1 \frac{y^{1/2}}{2}\cdot\left(4 - 4y + y^2 - y^4\right)dy =$$

$$= \int_0^1 \left(2\cdot y^{1/2} - 2\cdot y^{3/2} + \frac{1}{2}\, y^{2+1/2} - \frac{1}{2}\cdot y^{4+1/2}\right)dy =$$

$$= \int_0^1 \left(2y^{1/2} - 2y^{3/2} + \frac{1}{2}\, y^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{2}\cdot y^{\frac{9}{2}}\right)dy =$$

$$= \left(2\cdot\frac{y^{3/2}}{\frac{3}{2}} - 2\cdot\frac{y^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{y^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{y^{\frac{11}{2}}}{\frac{11}{2}}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$\int (x^k)dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + c$$

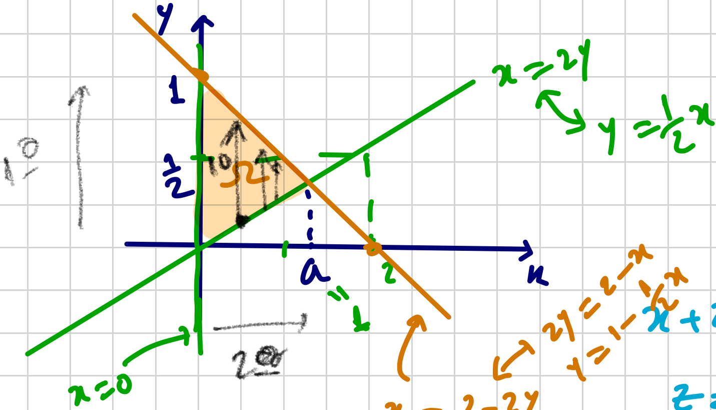
$$= \left(\frac{4}{3}y^{3/2} - \frac{4}{5}y^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{7}y^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{11}\cdot y^{\frac{11}{2}}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \left(\frac{4}{3} - \frac{4}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} - 0\right) = \frac{4}{3} - \frac{4}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} = \cdots$$

03) Obtenha o volume do tetraedro limitado pelos planos $\underbrace{x+2y+z=2}_{\text{plano}}$, $x=2y$, $\underbrace{x=0}_{\text{eixo } y}$ e $\underbrace{z=0}_{\text{eixo vertical}}$

(Resp: $\frac{1}{3}$)

Solução: A região Ω é uma região no plano xy. ou o "plano do chão"



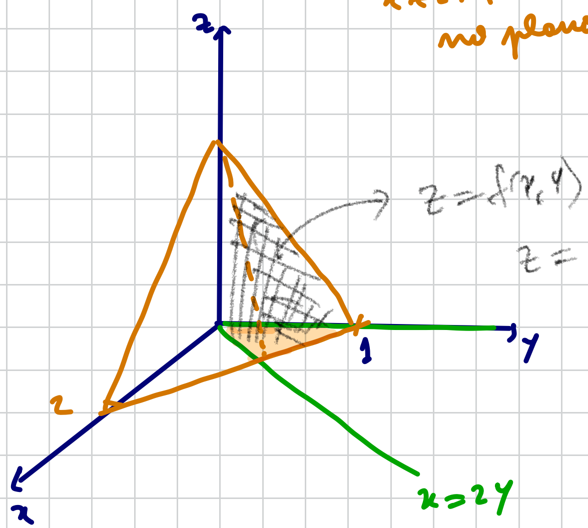
$x = 2-2y$ (traço do plano $x+2y+z=2$ no plano xy)

$x+2y+z=2$

$z=0$ (no plano xy);

$x+2y=2$

$x = 2-2y$



$z = 2-x-2y$

isolando z na eq. do plano

Logo, a medida do volume do tetraedro será dado por:

$$V = \iint_{\Omega} \underbrace{f(x,y)}_{2-x-2y}\, dA = \int_{x=0}^{x=a} \int_{y=\frac{1}{2}x}^{y=1-\frac{1}{2}x} (2-x-2y)\, dy\, dx;$$

onde $\underline{\underline{a}}$ é a abscissa do intercepto entre a retas $x = 2y$ e $x = 2-2y$; ou seja, a resolução do sistema:

$$\begin{cases} x = 2y \\ x = 2-2y \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} 2-2y &= 2y \\ 4y &= 2 \\ \boxed{y = \tfrac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a = x = 2.\left(\tfrac{1}{2}\right) = 1.$$

Disso:

$$V = \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=\frac{1}{2}x}^{y=1-\frac{1}{2}x} (2-x-2y)\,.dy\,dx =$$

$$= \int_{x=0}^{x=1} \left(2y - xy - y^2\right)\Bigg|_{y=\frac{1}{2}x}^{y=1-\frac{1}{2}x} dx =$$

$$= \int_{x=0}^{x=1} 2\left(1-\frac{1}{2}x\right) - x\cdot\left(1-\frac{1}{2}x\right) - \left(1-\frac{1}{2}x\right)^2 - \left[2\cdot\frac{1}{2}x - x\cdot\left(\frac{1}{2}x\right) - \left(\frac{1}{2}x\right)^2\right]$$

$$= \int_0^1 \left(2 - x - \cancel{x} + \frac{x^2}{2} - 1 + \cancel{x} - \cancel{\frac{x^2}{4}} - x + \frac{x^2}{2} + \cancel{\frac{x^2}{4}}\right) dx$$

$$= \int_0^1 (1 - 2x + x^2)\, dx = \left(x - x^2 + \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 =$$

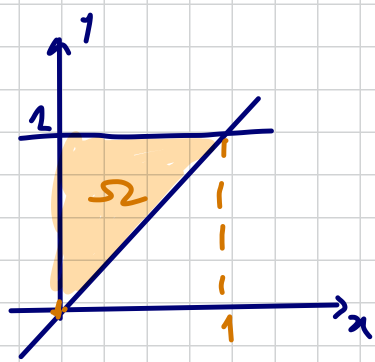
$$= \cancel{1} - \cancel{1} + \frac{1}{3} - (0 - 0 + 0) = \frac{1}{3} \text{ u.v}$$

(unidades de volume)

---

04) Calcule $\displaystyle\int_0^1 \int_x^1 \operatorname{sen} y^2\, dy\, dx$.

Solução: $\displaystyle\int_{x=0}^{x=1} \underbrace{\int_{y=x}^{y=1} \operatorname{sen} y^2 \, dy}_{?}\, dx$



O problema que inicialmente se vê consiste no fato de que não é possível calcular a integral indefinida: $\int \operatorname{sen} y^2 \, dy$

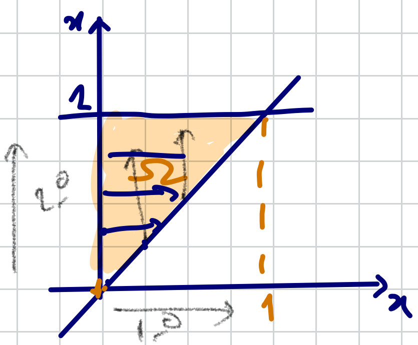
$$\int \operatorname{sen} u \, du = -\cos u + C$$

$$u = y^2 \Rightarrow du = 2y\,dy$$

FALTA ESTA VARIÁVEL.

Como contornar esta dificuldade?

A única maneira é trocar a ordem de integração, sem deformar a região Ω; o que vai alterar os limites de integração, mas tornando possível a integração. Vejamos:



$$\int_{x=0}^{x=1}\int_{y=x}^{y=1} \operatorname{sen} y^2 \, dy\, dx = \int_{y=0}^{y=1}\int_{x=0}^{x=y} \underbrace{\operatorname{sen} y^2}_{\text{CONSTANTE PARA } x.} \cdot dx\, dy =$$

$$= \int_{y=0}^{y=1} \operatorname{sen} y^2 \left(\int_{x=0}^{x=y} dx \right) dy = \int_{y=0}^{y=1} \operatorname{sen} y^2 \cdot x \Big|_{x=0}^{x=y} dy =$$

$$= \int_{y=0}^{y=1} \operatorname{sen} y^2 \cdot (y-0)\, dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \operatorname{sen} y^2 \cdot 2y \cdot dy =$$

$$\int \operatorname{sen} u \, du = -\cos u + C$$

$$u = y^2$$

$$\Rightarrow du \; 2y\,dy$$

$$= \frac{1}{2} \left(-\cos y^2 \right) \Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(-\cos 1 - (-\cos 0) \right) = \frac{1}{2} \left(-\cos 1 + 1 \right)$$

$$= \frac{1 - \cos 1}{2} \; //$$