CÁLCULO 3, TURMA T_2

25/05/26 — AULA 24

INTEGRAIS DUPLAS:

No que segue, vamos focar os estudos em integrais da forma $\int_{\Omega} f(x,y)\,d_A$, onde d_A chama-se um ELEMENTO DE ÁREA, podendo ser $d_A = dx\,dy$ ou $dA = dy\,dx$

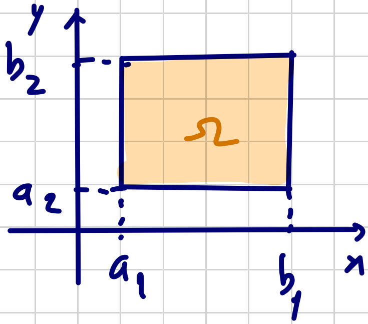
Doravante, Ω sempre será limitado e também J-mensurável, razão pela qual não escreveremos mais, salvo menção em contrário.

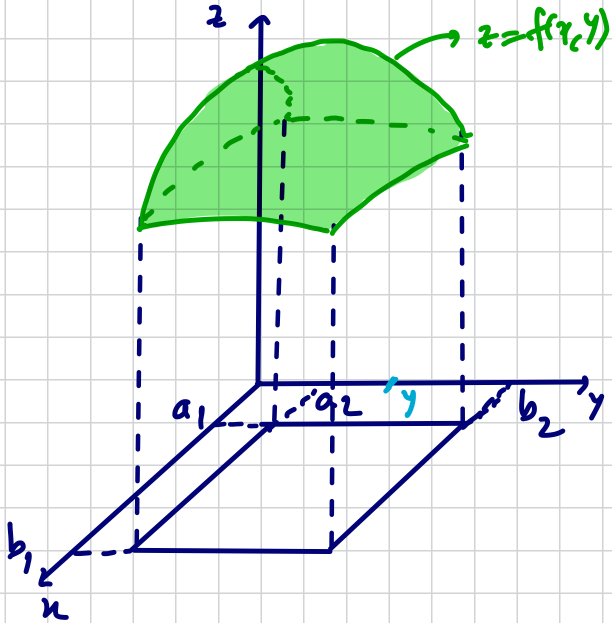
O cálculo de integrais duplas $\iint_{\Omega} f(x,y)\,d_A$ será realizado de "forma iterada", conforme os dois casos possíveis; dependendo da região Ω ao qual será integrada:

CASO 1: $\Omega = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, ou seja Ω é um retângulo do $\mathbb{R}^2$ (bloco).

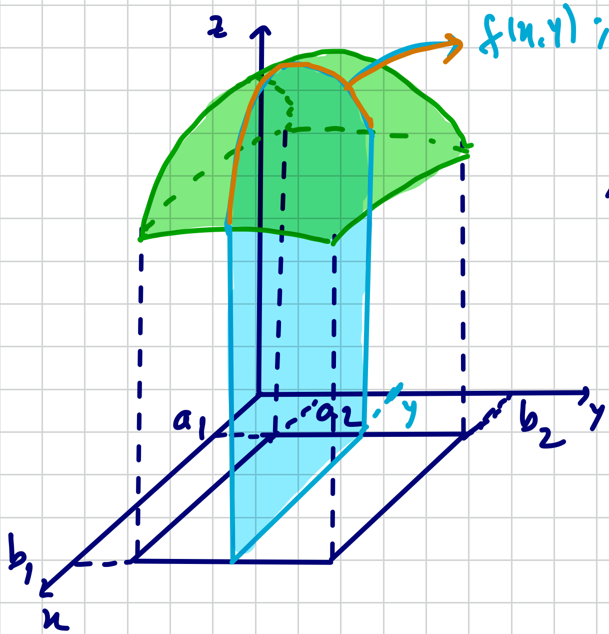
Para simplificar a explicação, considere $f \geq 0$

em Ω (para a integral dupla representar geometricamente, um volume).





Tome $y \in [a_2, b]$ qualquer. Considere o plano paralelo ao plano xz, passando pelo ponto y destacado. O corte deste plano com a superfície $z=f(x,y)$ e a região Ω determina uma "lâmina", conforme o esquema abaixo:



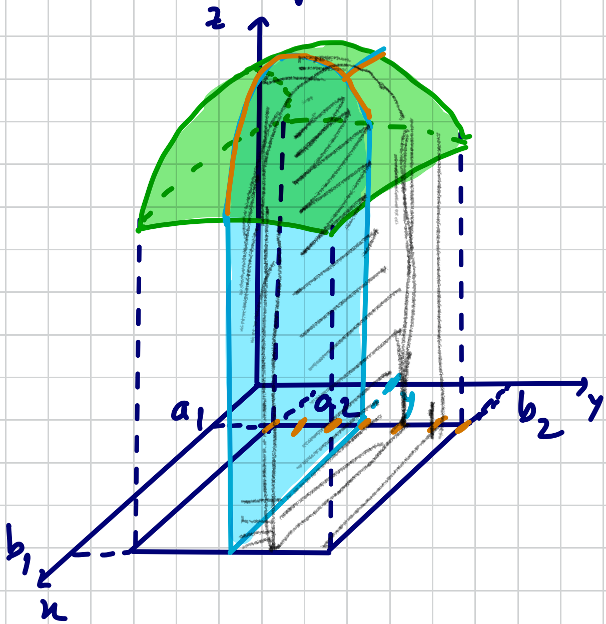
A área dessa lâmina será $A(y)$, dada por:

$$A(y) = \int_{x=a_2}^{x=b_1} f(x,y)\,.\,dx$$

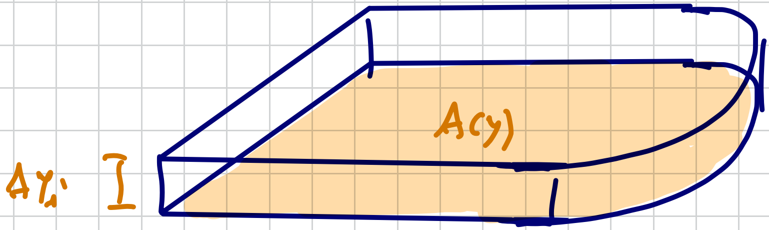
Seja $P = \{a_2 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b\}$ uma partição do intervalo $[a_2, b_2]$, determinando subintervalos $[t_{i-1}, t_i]$ de comprimentos

$$\Delta y_i = t_i - t_{i-1}$$

ESTA PARTIÇÃO VAI PRODUZIR AS "FATIAS" DO "PÃO DE FORMA"



O volume $\tilde{V}$ da "fatia" de altura Δy_i e base $A(y)$ será:



$$\tilde{V} = A(y) \cdot \Delta y_i$$

O volume do sólido abaixo do gráfico de $z = f(x,y)$ no retângulo $\Omega = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, será aproximado por:

$$\tilde{V} = \sum_{i=1}^{n} A(y) \cdot \Delta y_i \ ; \ \text{uma}$$

soma de Riemann.

O volume V será dado por:

$$V = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} A(y) \cdot \Delta y_i = \int_{y=a_2}^{y=b_2} A(y) \cdot dy =$$

$$A(y) = \int_{x=a_1}^{x=b_1} f(x,y)\, dx$$

$$= \int_{y=a_2}^{y=b_2} \left(\int_{x=a_1}^{x=b_1} f(x,y)\,.dx \right) dy$$

; o que chamamos de <u>integral iterada</u>.

Ou seja, o cálculo de uma integral dupla em um retângulo resume-se ao cálculo de duas integrais definidas, primeiro numa variável, e depois na outra.

Acima desenvolvemos

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_{y=a_2}^{y=b_2} \int_{x=a_1}^{x=b_1} f(x,y)\,dx\,dy \,.$$

Mas também poderíamos fazer:

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \underbrace{\int_{x=a_1}^{x=b_1} \underbrace{\int_{y=a_2}^{y=b_2} f(x,y)\,dy}_{\text{1º integra em } y}\,dx}_{\text{depois, integra em } x.}$$

Vejamos alguns exemplos:

a) O exemplo feito por definição, na aula 21:

$$\int_A (2x+3y)\,dx\,dy \quad ; \text{ onde } \quad A = \underbrace{[0,1]}_{x} \times \underbrace{[0,2]}_{y}.$$

Solução:

$$\int_A (2x+3y)\,dx\,dy = \int_{y=0}^{y=2} \left(\int_{x=0}^{x=1} (2x+3y)\,dx \right) dy =$$

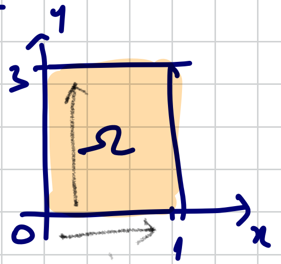
$$= \int_{y=0}^{y=2} \left(x^2 + 3xy\right)\Big|_{x=0}^{x=1} dy = \int_{y=0}^{y=2} \left(1^2+3y-(0)\right) dy =$$

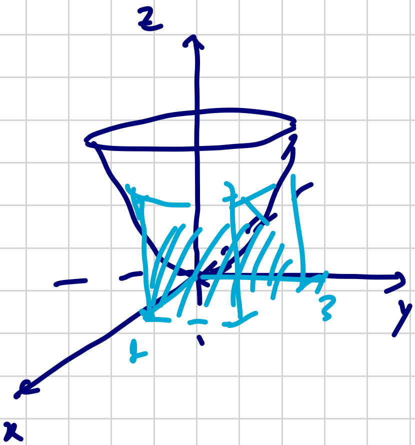
$$\int_0^2 (1+3y)\,dy = \left(y + \frac{3y^2}{2}\right)\Big|_0^2 = 2 + 3.\frac{\cancel{(4)}^{\,2}}{\cancel{2}} - 0$$

$$= 2 + 6 = 8$$

02) Calcule $\displaystyle\iint_\Omega (x^2+y^2)\,dA$, sendo $\Omega=[0,1]\times[0,3]$.

Solução:





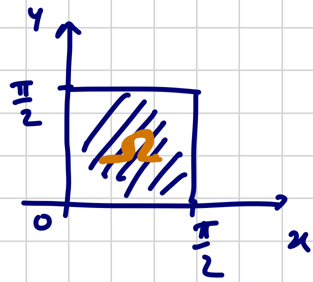
$$\iint_\Omega (x^2+y^2)\,dA = \int_{y=0}^{y=3}\left(\int_{x=0}^{x=1}(x^2+y^2)\,dx\right)dy =$$

$$= \int_{y=0}^{y=3}\left(\frac{x^3}{3}+y^2\cdot x\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1} dy = \int_{y=0}^{y=3}\left[\frac{1}{3}+y^2-(0+0)\right]dy =$$

$$= \int_0^3\left(\frac{1}{3}+y^2\right)dy = \left(\frac{1}{3}y+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^3 =$$

$$\frac{1}{\cancel{3}}\cdot\cancel{3}^{\,1} + \frac{(3)^{\cancel{3}\,2}}{\cancel{3}} - (0+0) = 1+(3)^2 = 1+9 = 10$$

03) $\displaystyle\int_{\Omega} \cos(x-y)\, d_A \quad ; \quad \Omega = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$



solução:

$$\int_{\Omega} \cos(x-y)\, d_A = \int_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}} \left(\int_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} \cos(x-y)\, dx \right) . dy =$$

$\int \cos u \, du$

$u = x-y \Rightarrow du = dx$

$$= \int_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(x-y) \Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} dy =$$

$$= \int_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}} \Big(\underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - y\right)}_{=\cos y} - \underbrace{\operatorname{sen}(-y)}_{=-\operatorname{sen} y} \Big) dy =$$

ARCOS COMPLEMENTARES.

pois seno é função ímpar.

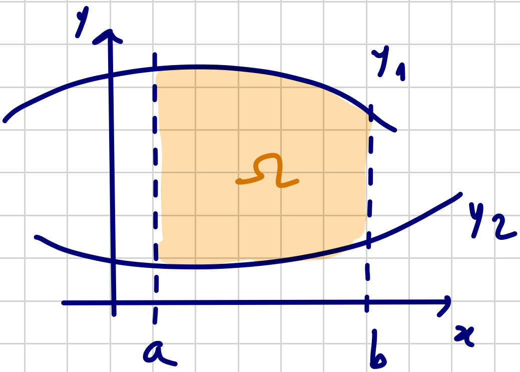
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos y + \operatorname{sen} y)\, dy = \operatorname{sen} y \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (-\cos y) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

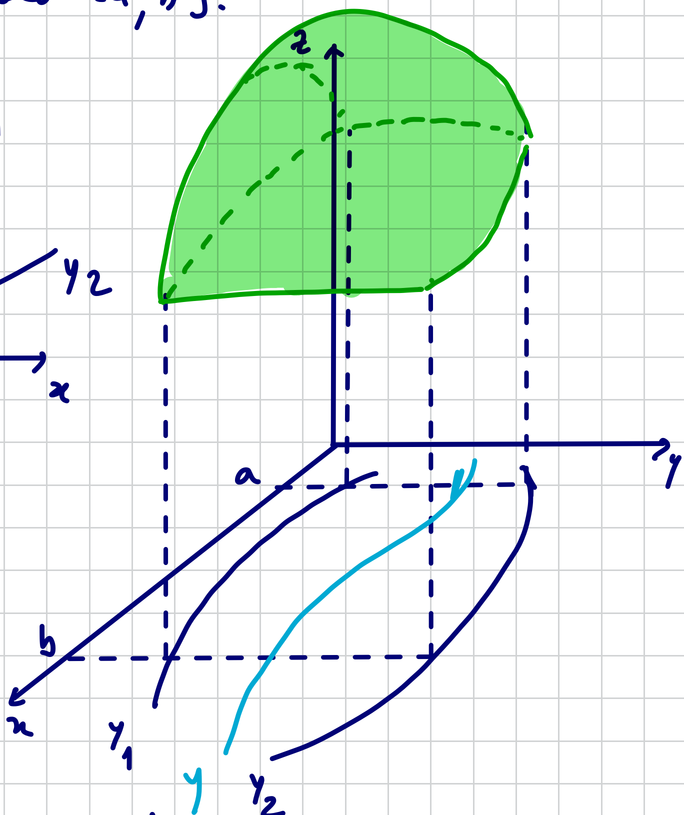
$$= \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen} 0 - \cos\frac{\pi}{2} - (-\cos 0)$$

$$= 1 - 0 - 0 + 1 = 2$$

<u>CASO 2 (caso geral)</u>: quando Ω é limitado por pelo menos uma curva.

Novamente, considere $f \geq 0$ (para dar um significado visual, geométrico, sentido de volume); e Ω limitado por duas curvas γ_1 e γ_2 no intervalo $[a, b]$.

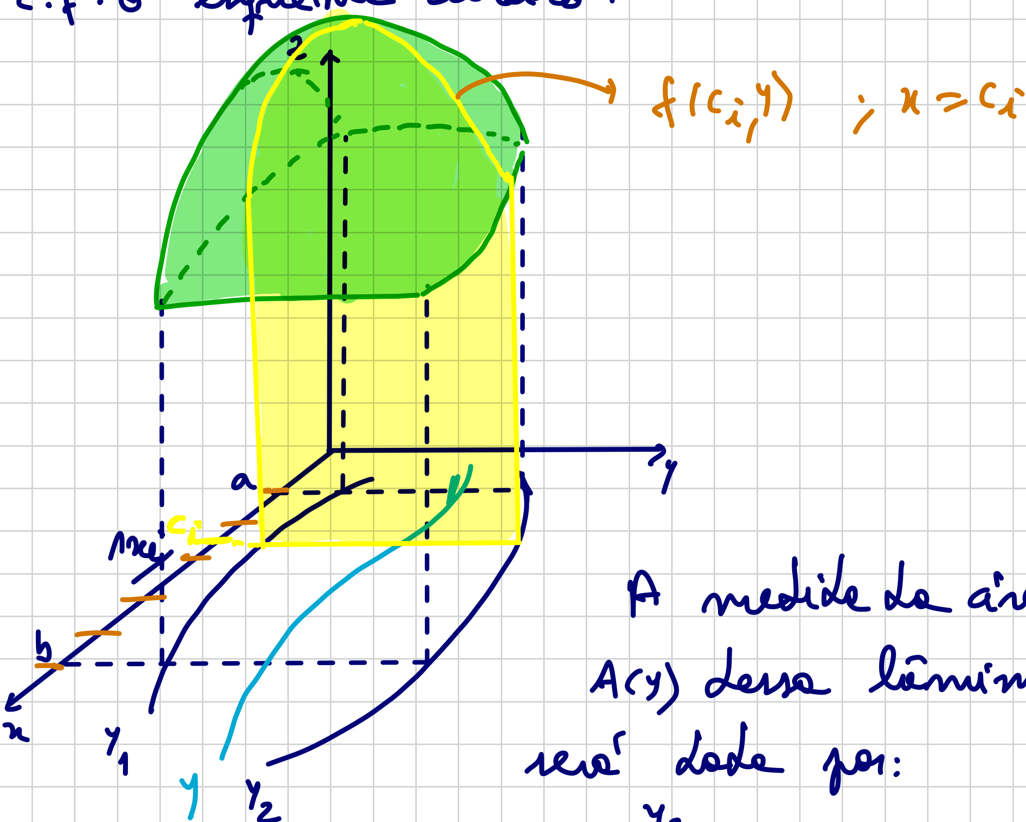




Seja γ uma curva entre γ_1 e γ_2.

Seja P uma partição do intervalo $[a, b]$, determinando subintervalos da forma $[t_{i-1}, t_i]$, de comprimento $\Delta x_i = t_i - t_{i-1}$.

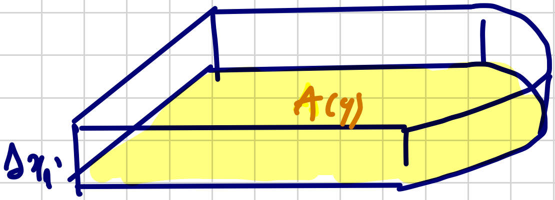
Tome um ponto c_i no subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$ e considere a "lâmina" determinada pelo corte do plano paralelo ao plano yz, passando por c_i, determinando a lâmina abaixo do gráfico de f, c.f. o esquema abaixo:



A medida da área $A(y)$ dessa lâmina será dada por:

$$A(y) = \int_{y_1}^{y_2} f(c_i, y)\, dy$$

O volume $\tilde{V}$ de cada "pedaço" será:



$$\tilde{V} = A(y) \cdot \Delta x_i$$

A medida do volume V será dada por:

$$V = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} A(y) \cdot \Delta x_i = \int_{x=a}^{x=b} A(y) \cdot dx$$

$$= \int_{x=a}^{x=b} \left(\int_{y=y_1}^{y=y_2} f(x,y) \cdot dy \right) dx$$

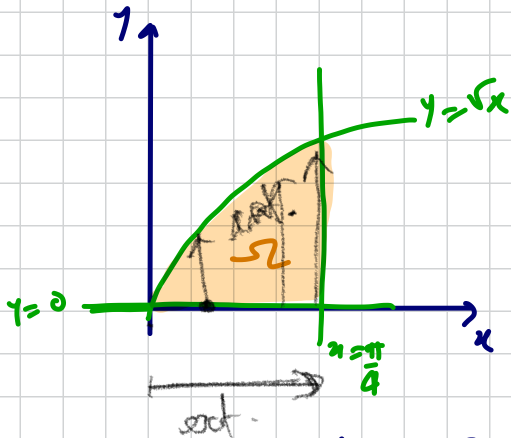
Ou seja, novamente o cálculo de uma integral iterada, sendo que os limites de integração da integral mais interna podem ser funções, mas a mais externa são constantes.

EXEMPLOS:

01) Calcule $\iint_{\Omega} \sqrt{x}\,.\cos(y\sqrt{x})\,dx\,dy$, com

Ω formado pelas retas $y=0$; $x=\frac{\pi}{4}$ e pela curva $y=\sqrt{x}$.

solução: Precisamos desenhar a região Ω.



1º: em x

2º: em y

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,d_A = \int_{x=0}^{x=\frac{\pi}{4}} \left(\int_{y=0}^{y=\sqrt{x}} \sqrt{x}\,.\cos(y\sqrt{x})\,.\,dy \right) dx$$

$$= \int_{x=0}^{x=\frac{\pi}{4}} \left(\sqrt{x}\,. \int_{y=0}^{y=\sqrt{x}} \cos(y\sqrt{x})\,dy \right) dx =$$

$= \int \cos u\,du$

$u = y\sqrt{x} \Rightarrow du = \sqrt{x}\,dy$

$$= \int_{x=0}^{x=\frac{\pi}{4}} \int_{y=0}^{y=\sqrt{x}} \cos(\underbrace{y\sqrt{x}}_{u}) \cdot (\underbrace{\sqrt{x}\,dy}_{du})\,dx =$$

$$= \int_{x=0}^{x=\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}(y\sqrt{x}) \Big|_{y=0}^{y=\sqrt{x}} dx =$$

$$= \int_{x=0}^{x=\frac{\pi}{4}} \left(\operatorname{sen}(\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}) - \operatorname{sen} 0\right) dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen} x \, . dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\cos\frac{\pi}{4} - (-\cos 0)$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = \frac{-\sqrt{2}+2}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \,//$$