CÁLCULO 3, TURMA T2.

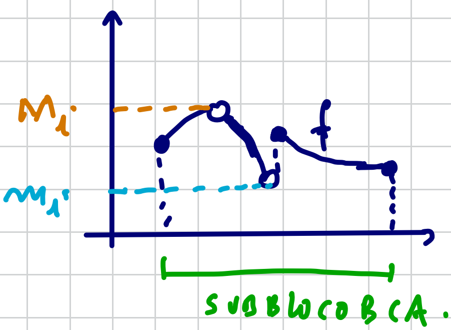
18/05/26 - AULA 21

Na aula passada iniciamos o estudo de integrais múltiplas. Dada uma função limitada $f : A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, definida em um bloco A do $\mathbb{R}^m$, definimos as somas superior e inferior de f, em relação a uma partição P do bloco A, respectivamente, por:

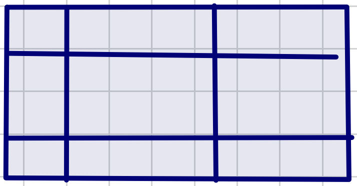
$$S(f;P) = \sum_{B \in P} M_i \cdot \operatorname{Vol}(B) \quad e$$

$$s(f;P) = \sum_{B \in P} m_i \cdot \operatorname{Vol}(B) \quad ; \quad \text{onde:}$$

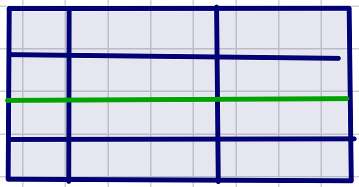
$$M_i = \sup_{x \in B} f(x) \quad e \quad m_i = \inf_{x \in B} f(x).$$



Vimos também o conceito de refinamento de uma partição: Q é um refinamento de uma partição P se $Q \subset P$.



PARTIÇÃO P de A.



PARTIÇÃO Q de A.

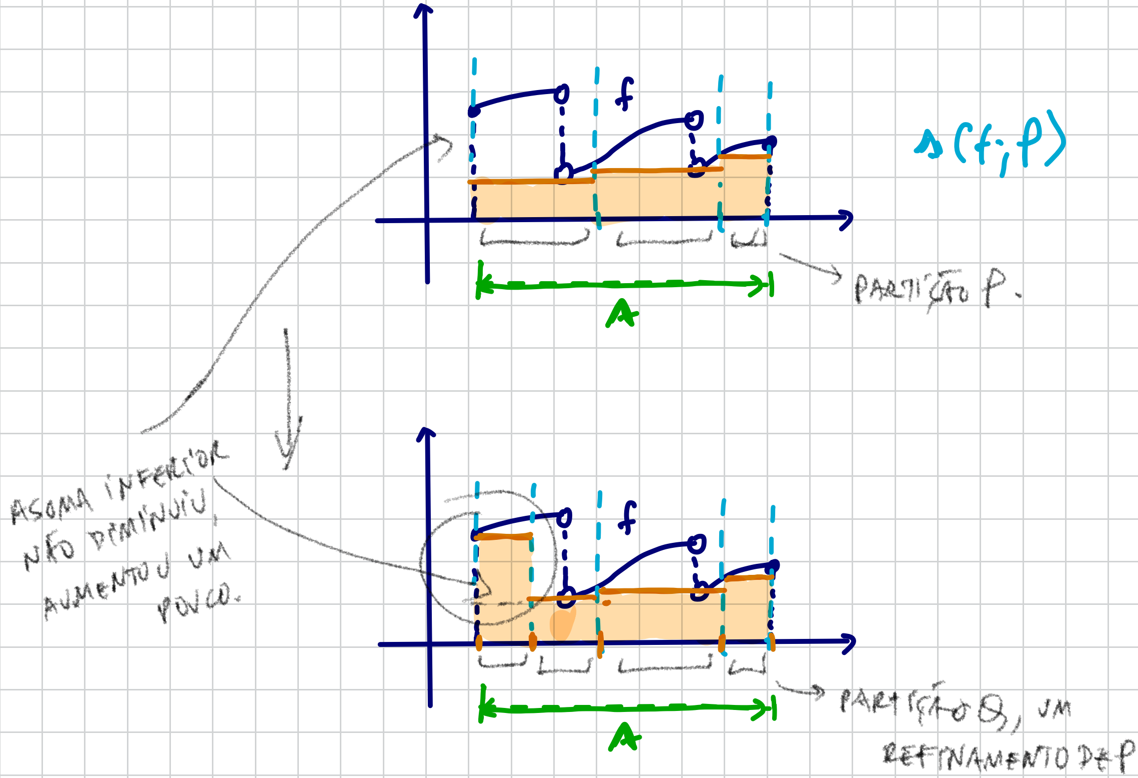
LEMA 2: Sejam $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função limitada e P, Q duas partições do bloco A, com $Q \subset P$, ou seja, Q um refinamento de P. Então:

$$s(f;P) \leq s(f;Q) \overset{\text{LEMA 1.}}{\leq} S(f;Q) \leq S(f;P).$$

Ou seja, ao efetuar um refinamento de uma partição, a soma superior não aumenta e a soma inferior não diminui.

A demonstração desse resultado é trabalhosa.

Faremos apenas uma ilustração para exemplificar, no caso de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $(A \subset \mathbb{R})$:



LEMA 03: Sejam $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função limitada, e P, Q duas partições do bloco A. Então,

$$s(f;P) \leq S(f;Q),$$

ou seja, qualquer soma inferior sempre é menor ou igual a qualquer soma superior.

DEMONSTR.: Basta tomar $\tilde{P} = P + Q$, uma partição combinando as partições P e Q. Logo, $\tilde{P}$

será um refinamento para P e para Q. Logo, pelo LEMA 2, segue que:

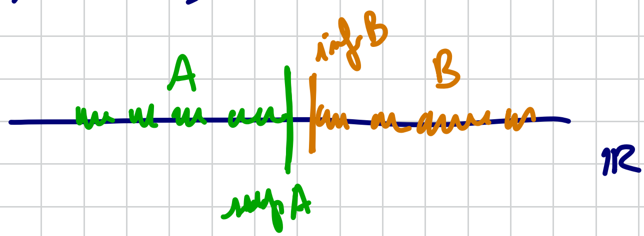
$$s(f;P) \le s(f;\tilde{P}) \le S(f;\hat{P}) \le S(f;Q)$$

$\square$

INTEGRAIS INFERIOR E SUPERIOR:

De um resultado da Análise real, tem-se:

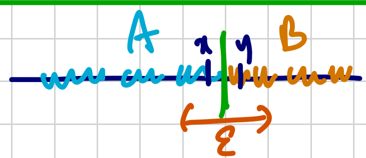
Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ conjuntos não vazios de $\mathbb{R}$, tais que, $\forall x \in A, \forall y \in B, x \le y$.



Então, $\sup A \le \inf B$.

Além disso,

$$\boxed{\sup A = \inf B \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, \exists y \in B \text{ tais que } y - x < \varepsilon.} \quad (*)$$



No nosso caso de interesse, sendo $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função limitada no bloco $A \subset \mathbb{R}^m$, define os conjuntos:

$$M = \{ s(f;P) : P \text{ é partição do bloco } A\} \subset \mathbb{R}$$

$$N = \{ S(f;P) : P \text{ é partição do bloco } A\} \subset \mathbb{R}.$$

Pelo LEMA 3, segue que, $\forall x \in M$, $\forall y \in N$,

$$x \leq y.$$

Pelo resultado da Análise real acima apresentado, tem-se que:

$$\sup M \leq \inf. N.$$

Isto inspira definir:

<u>Def.</u>: Seja $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função limitada no bloco A do $\mathbb{R}^m$. Definimos as integrais inferior e superior de f no bloco A, respectivamente, por:

$$\underline{\int_A} f = \sup M = \sup_{P \text{ é part. do } A} s(f;P) \quad , \quad e$$

$$\overline{\int_A} f = \inf. N = \inf_{P \text{ é part. de } A} S(f;P) .$$

<u>Def.</u> Dizemos que $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ é integrável no bloco A se, e somente se,

$$\underline{\int_A} f = \overline{\int_A} f .$$

O valor comum chama-se integral de f no bloco A, e é denotado por $\int_A f$.

Voltando ao resultado (#) da Análise real, temos que:

$$\underbrace{\sup M}_{\underline{\int_A} f} = \underbrace{\inf. N}_{\overline{\int_A} f} \iff \forall \varepsilon > 0, \ \exists x \in M \ (\to s(f;P)), \ \exists y \in N \ (\to S(f;P))$$

tais que $y - x < \varepsilon$. ;

onde $M = \{ s(f;P) : P \text{ é partição de } A \} \subset \mathbb{R}$;

$N = \{ S(f;P) : P \text{ é partição de } A \} \subset \mathbb{R}$.

Ou seja, tem-se:

$$\underline{\int_A} f = \overline{\int_A} f \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists P_1, P_2 \text{ partições de } A \text{ tais que } S(f;P_1) - s(f;P_2) < \varepsilon.$$

$\Updownarrow$ def.

f é integrável

Ou seja, temos que

$$f \text{ é integrável} \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists P_1, P_2 \text{ partições de } A \text{ tais que } S(f;P_1) - s(f;P_2) < \varepsilon.$$

Este resultado já é um critério de integrabilidade; porém, ainda "ruim" pois envolve duas partições. Um melhor resultado é o seguinte:

TEOREMA: (CRITÉRIO DE INTEGRABILIDADE) Seja $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Então, f é integrável se, e somente se, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists P$ partição do bloco A, tal que

$$S(f;P) - s(f;P) < \varepsilon.$$

DEMONSTRAÇÃO:

($\Rightarrow$) Suponha $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ integrável.

Assim, dado $\varepsilon>0$, $\exists\, P_1, P_2$ partições de A tais que

$$S(f;P_1) - s(f;P_2) < \varepsilon.$$

Seja $\tilde{P} = P_1 + P_2$ um refinamento para P_1 e para P_2.
Então, pelo LEMA 2, segue que:

$$s(f;P_2) \leq s(f;\tilde{P}) \leq S(f;\tilde{P}) \leq S(f;P_1)$$

Ou seja, temos:

(I) $\qquad S(f;P_1) \geq S(f;\tilde{P})$ $\qquad$ e

$$s(f;P_2) \leq s(f;\tilde{P}) \qquad \times(-1)$$

(II) $\qquad -s(f;P_2) \geq -s(f;\tilde{P})$

Somando (I) e (II), vem:

$$\underbrace{S(f;\tilde{P}) - s(f;\tilde{P})} \leq S(f;P_1) - s(f;P_2) < \varepsilon.$$

$$\Longrightarrow S(f;\tilde{P}) - s(f;\tilde{P}) < \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

($\Leftarrow$) Reciprocamente, suponha que,

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists P$ partição de A tal que

$$S(f;P) - s(f;P) < \varepsilon.$$

A mostrar: f é integrável.

Para isto, basta tomar $P_1 = P_2 = P$. Assim:

$$S(f;P_1) - s(f;P_2) < \varepsilon \quad ; \quad \text{i.e.; } f \text{ é}$$

integrável.

$\square$

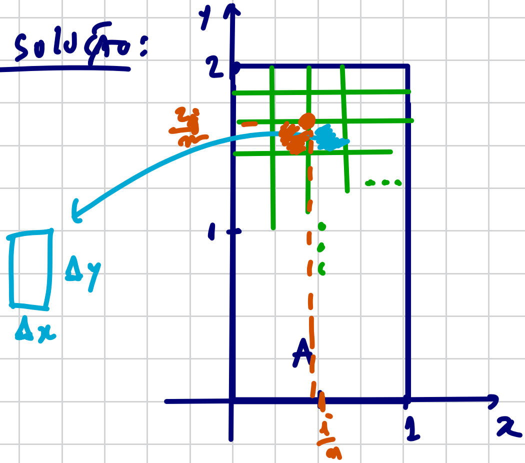
Obs.: no caso $A \subset \mathbb{R}^2$, costuma-se escrever:

$$\int_A f = \int_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_A f(x,y)\,dx\,dy.$$

No que segue apresentaremos um "simples" exemplo de cálculo de uma integral DUPLA (duas variáveis) pela definição.

Ex: Calcule $\int_A (2x+3y)\,dx\,dy$, onde A é o bloco: $A = [0,1]\times[0,2]$.

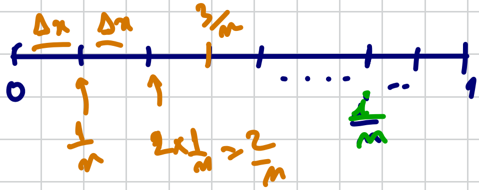
Solução:



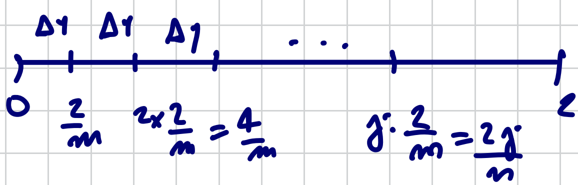
Seja $P = P_1 \times P_2$ partição de A, regular, de dimensões Δx e Δy, onde

$$\Delta x = \frac{1-0}{n} \quad e \quad \Delta y = \frac{2-0}{m}$$

Ou seja, dividiremos o intervalo $[0,1]$ em n subintervalos regulares de comprimento $\Delta x = \frac{1}{n}$:

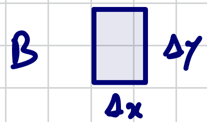


E, o intervalo $[0,2]$ é dividido em m subintervalos regulares de tamanho $\Delta y = \frac{2}{m}$:



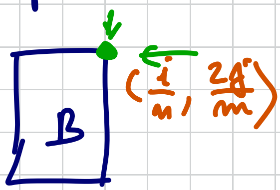
Formam-se, assim $m \times n$ blocos de dimensões

Δx e Δy



Assim, o volume de cada subbloco B é dado por $Vol(B) = \Delta x \cdot \Delta y = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{m} = \frac{2}{m \cdot n}$

Como $f(x,y) = 2x + 3y$ é crescente em $[0,1] \times [0,2]$, então, o máximo valor de f em cada bloco ocorre no canto superior direito:



Ou seja;

$$M_i = \sup_B f(x) = (2x+3y)\Big|_{\substack{x = \frac{i}{n} \\ y = \frac{2j}{m}}} =$$

$$= 2\frac{i}{n} + 3 \cdot \frac{2j}{m} = \frac{2i}{n} + \frac{6j}{m}.$$

Assim, podemos montar a soma superior:

$$s(f;P) = \sum_{B\in P} M_i \, \mathrm{Vol}(B) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{2i}{m} + \frac{6j}{m} \right) \cdot \frac{2}{m\cdot m}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{4i}{m\, m^2} + \frac{12j}{m^2 m} \right) = \sum_{i=1}^{m} \left[\frac{4i}{m\, m^2} \cdot \sum_{j=1}^{m} 1 + \frac{12}{m^2 m} \sum_{j=1}^{m} j \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left[\frac{4i}{\cancel{m}\, m^2} \cdot \cancel{m} + \frac{\overset{6}{\cancel{12}}}{\cancel{m^2}\cdot m} \cdot \frac{(1+m)\cdot\cancel{m}}{\cancel{2}} \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{4i}{m^2} + \frac{6(m+1)}{m\cdot m} \right) = \sum_{i=1}^{m} \frac{4i}{m^2} + \sum_{i=1}^{m} \frac{6(m+1)}{m\cdot m}$$

$$= \frac{4}{m^2} \cdot \sum_{i=1}^{m} i + \frac{6(m+1)}{m\cdot m} \cdot \sum_{i=1}^{m} 1.$$

$$= \frac{4}{m^{\cancel{2}}} \cdot \left(\frac{(1+m)\cdot\cancel{m}}{2} \right) + \frac{6(m+1)}{m\cdot\cancel{m}} \cdot \cancel{m}.$$

$$= \frac{2}{m}(1+m) + \frac{6}{m}(m+1) =$$

$$= \frac{2}{n} + 2 + 6 + \frac{6}{m} = 8 + \frac{2}{n} + \frac{6}{m}.$$

$$\Rightarrow S(f;P) = 8 + \frac{2}{n} + \frac{6}{m}$$

Assim, o refinamento faz-se passando o limite com m e n tendendo ao infinito. Ou seja.

$$\overline{\int_A} f = \lim_{\substack{m \to \infty \\ n \to \infty}} S(f;P) = \lim_{\substack{m \to \infty \\ n \to \infty}} 8 + \cancel{\frac{2}{n}} + \cancel{\frac{6}{m}} = 8$$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{\int_A} f = 8.}$$

Analogamente,

$$\boxed{\underline{\int_A} f = 8}$$

Portanto, f é integrável, e

$$\int_A f(x,y)\,dx\,dy = 8.$$