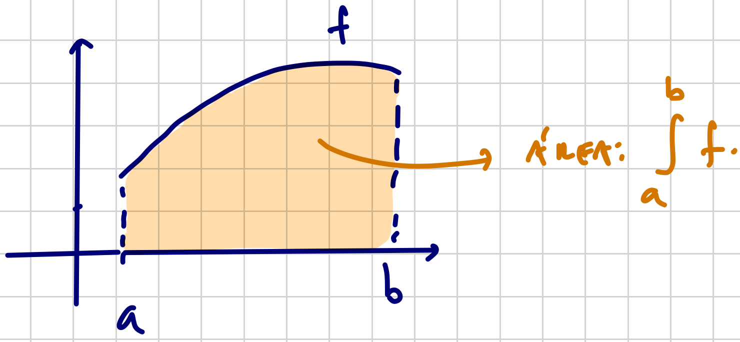
CÁLCULO 3, TURMA T2.

$\boxed{\text{15/05/26 - AULA 20}}$

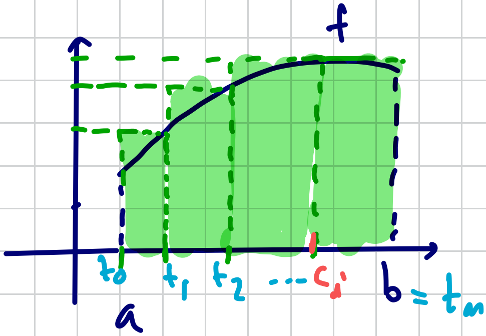
INTEGRAIS MÚLTIPLAS:

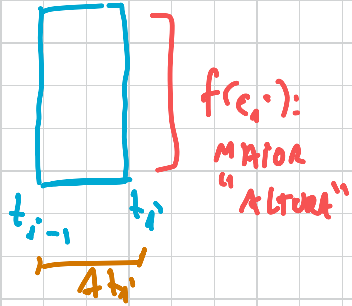
INTRODUÇÃO: Queremos dar sentido para integrais definidas da forma $\int_\Omega f$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^m$.

Recordando do CÁLCULO 2, considerando $f \geq 0$, então $\int_{[a,b]} f$ fornece a área da região $\Omega = [a,b]$ abaixo do gráfico de f.



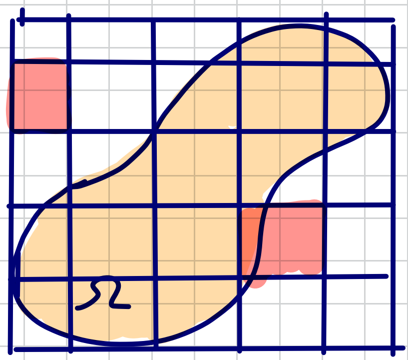
Isso se faz tomando uma partição de $[a,b]$, e construindo uma SOMA DE RIEMANN, tomando o limite dessa soma quando o número de subintervalos dessa partição tender a infinito.





$$A = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i).\Delta t_i$$

A dificuldade para funções $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ consiste no fato de que a região do domínio não é um simples intervalo. Por exemplo, se $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, uma partição de Ω deverá ser um corte horizontal mais um corte vertical:



$\Omega \subset \mathbb{R}^2$

Partição (divisão) de $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, formando uma grade.

A dificuldade que aparece é observar que "pedaços" da divisão ficam de fora de Ω, como os destacados na imagens acima. Mesmo que se faça uma grade mais fina isso vai ocorrer.

Por esta razão, inicialmente estudaremos funções em blocos do $\mathbb{R}^n$, para depois chegarmos a regiões mais gerais. Ou seja, temos a definição:

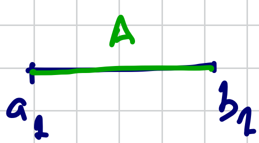
Def.: Um bloco $A \subset \mathbb{R}^n$ é o conjunto dado por:

$$A = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

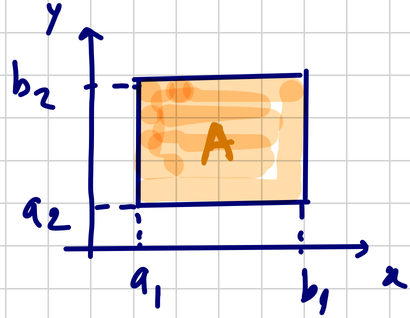
PRODUTOS CARTESIANOS.

Por exemplo:

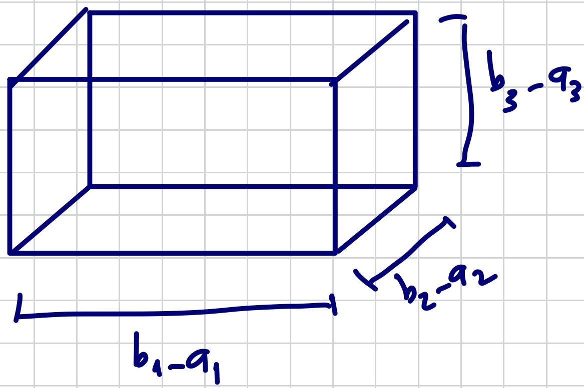
- em $\mathbb{R}$: um bloco $A = [a_1, b_1] \subset \mathbb{R}$ é um intervalo:



- em $\mathbb{R}^2$: um bloco $A = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ é um retângulo:



• em $\mathbb{R}^3$: um bloco $A = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ será um paralelepípedo.



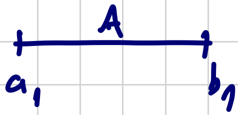
<u>Def.</u>: Seja $A = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ um bloco. O volume do bloco A é definido por

$$\operatorname{vol}(A) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

$$= (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot \dots \cdot (b_n - a_n)$$

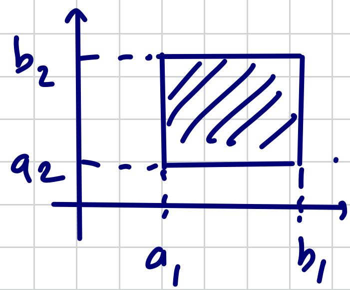
(ou seja, é o produto de suas dimensões)

Ex: Em $\mathbb{R}$, $Vol(A)$ é a medida do comprimento do seu intervalo:



$$Vol(A) = b_1 - a_2.$$

Em $\mathbb{R}^2$, $Vol(A)$ é a medida da área:



$$Vol(A) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2)$$

Em $\mathbb{R}^3$, $Vol(A)$ será o produto das 3 dimensões; ou seja, sendo

$$A = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3],$$

então

$$Vol(A) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot (b_3 - a_3)$$

Def.: Seja $A \subset \mathbb{R}^m$ um bloco do $\mathbb{R}^m$. Uma partição do bloco A é o conjunto

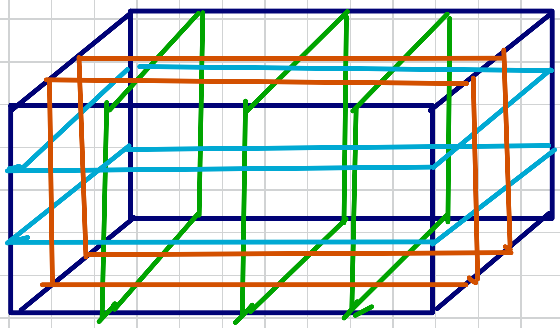
$$P = P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_m \quad ,$$

onde P_1 é partição de $[a_1, b_1]$

P_2 é partição de $[a_2, b_2]$

$\vdots$

P_m é partição de $[a_m, b_m]$.



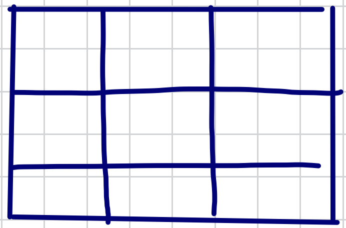
A

Def.: Uma partição P de um bloco $A \subset \mathbb{R}^m$ divide o bloco A em subblocos $B \in P$; tal que

$$\text{Vol}\, A = \sum_{B \in P} \text{Vol}(B)$$

Ex.: Em $\mathbb{R}^2$, uma partição P de $A \subset \mathbb{R}^2$ divide A em subblocos (subretângulos) B tais que

$$\text{Vol } A = \sum_{B \in P} \text{vol}(B)$$



PARTIÇÃO DE UM RETÂNGULO.

A

Def.: Dizemos que uma função $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ definida em um bloco A é limitada se $\exists\, M > 0$ tal que

$$|f(x)| \leq M, \quad \forall x = (x_1, \dots, x_m) \in A.$$

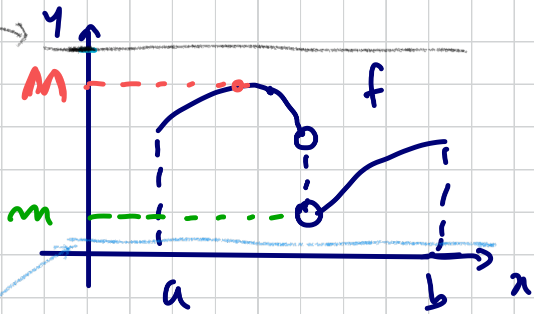
Def.: Seja $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma limitada no bloco A. Definimos o ínfimo e o supremo de f em A, respectivamente por:

$$m = \inf_{x \in A} f(x) \quad \text{e} \quad M = \sup_{x \in A} f(x);$$

onde o ínfimo é a maior cota inferior do conj. e o supremo é a menor cota superior.

Ex.: $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

aqui temos outra cota superior, mas não é a menor



NESTE EXEMPLO, NOTE QUE O SUPREMO M COINCIDE COM O MÁXIMO DA FUNÇÃO. PORÉM, f NÃO POSSUI MÍNIMO, MAS POSSUI O QUE CHAMAMOS DE ÍNFIMO, m.

aqui temos uma cota inferior (ou seja, o gráfico da f fica sempre acima dela), mas não é a maior cota inferior.

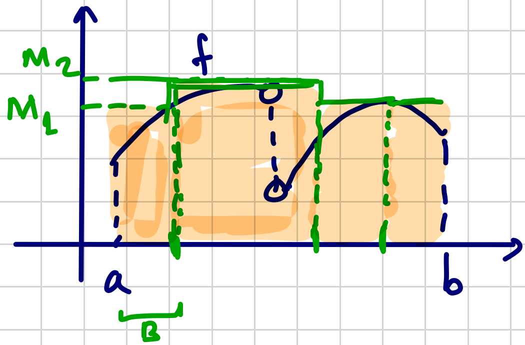
Def.: Seja $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função definida no bloco $A \subset \mathbb{R}^m$, e P uma partição de A.

Definimos as somas superior e inferior de f no bloco A, respectivamente, por:

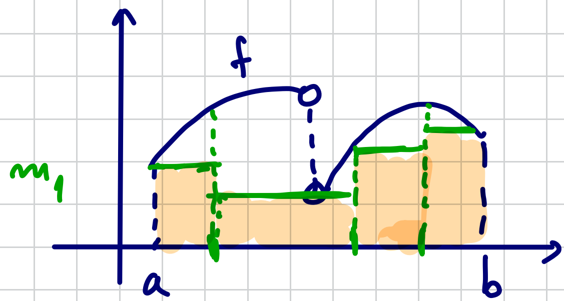
$$S(f;P) = \sum_{B \in P} M_i \cdot Vol(B) \quad ; \text{ e}$$

$$s(f;P) = \sum_{B\in P} m_i \,\mathrm{Vol}(B)$$

Ex: para $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f limitada.



$S(f;P)$



$s(f;P)$

Ou seja $S(f;P)$ representa uma aproximação da área (volume) por excesso, então $s(f;P)$ representa uma aproximação por falta.

LEMA 1: Seja $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função limitada no bloco $A \subset \mathbb{R}^m$, e seja P uma partição de A; formando subblocos $B \in P$.

Então, $s(f;P) \leq S(f;P)$

DEMONSTR.: Note que, dada P uma partição do bloco $A \subset \mathbb{R}^m$, definindo subblocos $B \in P$, então,

$$m_i \leq M_i \quad , \forall i.$$

Então,

$$m_i \cdot Vol(B) \leq M_i \cdot Vol(B),$$

pois $Vol(B) > 0$, $\forall B \in P$.

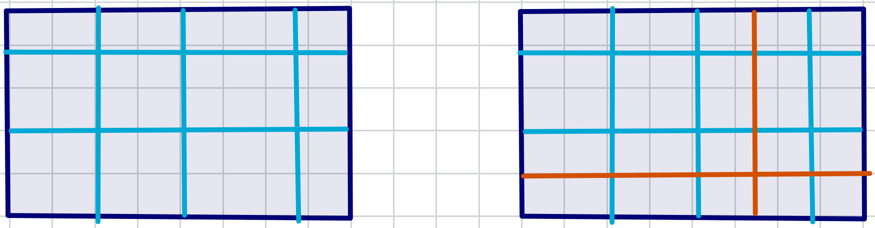
Somando todos os subblocos, obtemos:

$$\underbrace{\sum_{B \in P} m_i \cdot Vol(B)}_{s(f;P)} \leq \underbrace{\sum_{B \in P} M_i \cdot Vol(B)}_{= S(f;P)}$$

$$\Rightarrow s(f;P) \leq S(f;P).$$

$\square$

Def.: Sejam P e Q duas partições de um bloco $A \subset \mathbb{R}^m$. Dizemos que Q é um refinamento da partição P se $Q \subset P$.



PARTIÇÃO P de A. PARTIÇÃO Q de A.

$Q \subset P$.