CÁLCULO 3, TURMA T2

13/05/26 - AULA 19

No final da aula passada vimos um critério para classificar os pontos críticos. Combinando o teste da derivada segunda (o último resultado estabelecido na aula passada) com o teorema de Weierstrass(*), obtemos o seguinte resultado:

**COROLÁRIO:** Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável num compacto $\Omega \subset \mathbb{R}^m$. Então $f$ assume valores máximo e mínimo em $\Omega$, nos pontos críticos ou na fronteira de $\Omega$.

---

No que segue apresentaremos um exemplo.

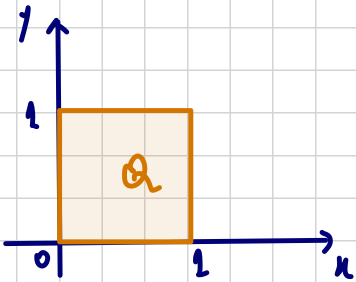
---

(*) T. DE WEIERSTRASS: Se uma função $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ for contínua em um compacto $\Omega$ do $\mathbb{R}^m$, então $f$ assume valores máximo e mínimo em $\Omega$.

## LISTA 06 ⊙ EXERCÍCIO 06:

6. Encontre o máximo de $f(x, y) = 2x + y - 3xy$ no quadrado unitário $Q = [0, 1] \times [0, 1]$. [Resp.: O máx. acontece na fronteira de $Q$ e o valor é $f(1, 0) = 2$].

**SOLUÇÃO:**




$$f : \underbrace{[0,1] \times [0,1]}_{Q} \to \mathbb{R}$$

$$f(x,y) = 2x + y - 3xy$$

**PONTOS CRÍTICOS:** onde $\nabla f = \vec{0} = (0,0)$

$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

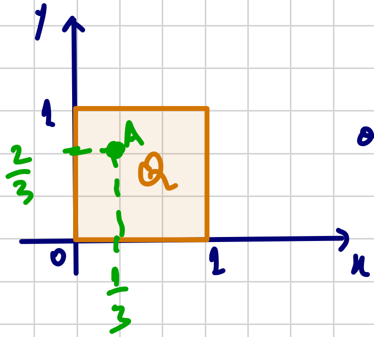
$$\nabla f = (2 - 3y, 1 - 3x)$$

Assim:

$$\nabla f = (0,0) \Leftrightarrow (2 - 3y, 1 - 3x) = (0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 3y = 0 \to y = \frac{2}{3} \\ 1 - 3x = 0 \to x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

PONTO CRÍTICO encontrado: $A\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \in Q$




onde: $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2-3y \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 1-3x \end{cases}$

A matriz hessiana $H(x,y)$ será:

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{yx} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix}, \text{ onde:}$$

- $f_{xx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(2-3y\right) = 0$

- $f_{yx} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(1-3x\right) = -3$

- $f_{xy} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(2-3y\right) = -3$

T. SCHWARZ.

- $f_{yy} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(1-3x\right) = 0$

Então:

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

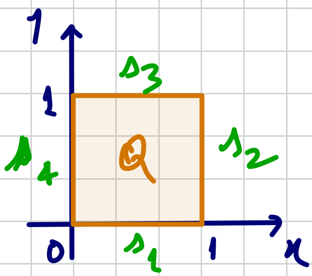
$$\Rightarrow H\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Disso, tem-se que:

$$\det\left(H\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right) = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 0 - (+9) = -9 < 0$$

Logo, o ponto $A\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ é um ponto de sela.

Assim o máximo (e o mínimo) vai ocorrer na fronteira de $Q = [0,1] \times [0,1]$.




Sejam $s_1$, $s_2$, $s_3$ e $s_4$ os segmentos que compõem a fronteira de $Q$.

Então, temos que um ponto $P(x,y)$ em cada segmento será; onde $f(x,y) = 2x + y - 3xy$.

- $P \in s_1 \Longleftrightarrow P(a, 0)$; com $0 < a \leq 1$.

  Neste caso:

$$f(P) = f(a,0) = 2.a + 0 - 3.a.0$$

$$f(a,0) = \underset{(\text{cresc.})}{2a};$$

e então o maior valor ocorre quando $a=1$, ou seja,

$$f(1,0) = 2.1 = 2 \Rightarrow \boxed{f(1,0)=2} \;(\text{I})$$

- $P \in \Delta_2 \Leftrightarrow P(1,b)$, onde $0 < b \leq 1$.

Neste caso:

$$f(P) = f(1,b) = 2.1 + b - 3.1.b$$

$$f(1,b) = 2 + b - 3b$$

$$f(1,b) = \underset{(\text{decresc.})}{2 - 2b};$$

e então o maior valor ocorre quando $b=0$, i.e.,

$$f(1,0) = 2 - 2.0 \Rightarrow \boxed{f(1,0)=2} \;(\text{II})$$

- $P \in D_3 \Leftrightarrow P(a,1)$; onde $0 < a \leq 1$.

Neste caso, tem-se:

$$f(P) = f(a,1) = 2.a + 1 - 3.a.1$$

$$f(a,1) = 2a + 1 - 3a$$

$f(a,1) = -a + 1$ (decresc)

Logo, o maior valor ocorre quando $a = 0$,

i.e.,

$$f(0,1) = -0+1 \Rightarrow \boxed{f(0,1) = 1} \text{ (III)}$$

- $P \in S_4 \Leftrightarrow P(0,b)$; com $a \leq b \leq 1$.

Neste caso, teremos:

$$f(P) = f(0,b) = 2.0 + b - 3.0.b$$

$$f(0,b) = b$$

(cresc.)

Logo, o máximo ocorre em $b = 1$, ou seja em $\boxed{f(0,1) = 1}$. (IV)

Comparando (I), (II), (III) e (IV) concluímos que o máximo ocorre na fronteira e é

$$f(1,0) = 2.$$

---

Devotaremos o restante da aula para resolver exercícios.

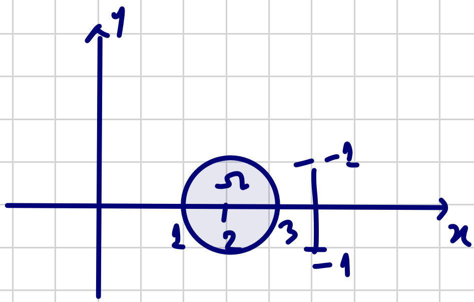
LISTA 06

7. Classifique os extremos relativos das seguintes funções:

(a) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$ na região $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2 + y^2 \leq 1\}$.
[Resp.: máx $(1,0)$ e mín $(3,0)$]

(b) $f(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{2\sqrt{2}}{3}$ na elipse $x^2 + 2y^2 \leq 1$.
[Resp.: máx $(\pm\frac{2}{\sqrt{5}}, \pm\frac{1}{\sqrt{10}})$, min $(0,0)$].

(a) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$ em $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2+y^2 \leq 1\}$




Como $\Omega$ é compacto (limitado e fechado), então $f$ possui máximo e mínimo, podendo ocorrer nos pontos críticos ou na fronteira.

PONTOS CRÍTICOS: onde $\nabla f = \vec{0} = (0,0)$.

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \text{ ; onde:}$$

$$f(x,y) = (x^2+y^2)^{-1}. \quad \text{Então:}$$

$$[(n)^k]' = k \cdot n^{k-1} \cdot n'$$

$$\bullet \ \frac{\partial f}{\partial x} = -1.(x^2+y^2)^{-2}.2x \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\bullet \ \frac{\partial f}{\partial y} = -1.(x^2+y^2)^{-2}.2y \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2y}{(x^2+y^2)^2}$$

Assim: $\nabla f = \left( \frac{-2x}{(x^2+y^2)^2}, \frac{-2y}{(x^2+y^2)^2} \right)$

$\nabla f = (0,0) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{-2x}{(x^2+y^2)^2} = 0 \Leftrightarrow -2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ \qquad \Rightarrow y \neq 0 \\ \dfrac{-2y}{(x^2+y^2)^2} = 0 \Leftrightarrow -2y = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ e } x \neq 0. \end{cases}$$

Então, temos pontos críticos da forma

$(0,y)$; $y \neq 0$; $-1 \leq y \leq 1$ e $(x,0)$; $x \neq 0$., $1 \leq x \leq 3$.
(veja no desenho acima).

A matriz hessiana $H(x,y)$ é dada por:

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{yx} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix}, \text{ onde:}$$

$$\bullet \ f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-2x}{(x^2+y^2)^2}\right) =$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{v \cdot u' - u v'}{v^2}$$

$$= \frac{(x^2+y^2)^2 \cdot (-2) - (-2x) \cdot 2 \cdot (x^2+y^2) \cdot 2x}{(x^2+y^2)^4}$$

$$= \frac{2\cancel{(x^2+y^2)} \cdot \left[-(x^2+y^2) + 4x^2\right]}{(x^2+y^2)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \frac{2\left[3x^2 - y^2\right]}{(x^2+y^2)^3}$$

$$f_{yy} = \frac{2\left[3y^2 - x^2\right]}{(x^2+y^2)^3} \qquad (\text{PELA SIMETRIA})$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-2x}{(x^2+y^2)^2}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(-2x \cdot (x^2+y^2)^{-2}\right) =$$

$$(v^k)' = k v^{k-1} \cdot v'$$

$$= -2x \cdot (-2) \cdot (x^2+y^2)^{-3} \cdot 2y$$

$$= \frac{-8xy}{(x^2+y^2)^3}.$$

$$f_{yx} = \frac{-8xy}{(x^2+y^2)^3} \qquad \text{( T. de SCHWARZ)}$$

$$\Rightarrow H(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{2(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3} & \dfrac{-8xy}{(x^2+y^2)^3} \\[2ex] \dfrac{-8xy}{(x^2+y^2)^3} & \dfrac{2(3y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^3} \end{bmatrix}$$

Iremos calcular

$H(x,0)$; $1 \leq x \leq 3$ e $H(0,y)$; $-1 \leq y \leq 1$. $y \neq 0$.

- $$H(x,0) = \begin{bmatrix} \dfrac{6\cancel{x^2}}{x^{\cancel{6}\,4}} & 0 \\[2ex] 0 & -\dfrac{2\cancel{x^2}}{x^{\cancel{6}\,4}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{6}{x^4} & 0 \\[2ex] 0 & -\dfrac{2}{x^4} \end{bmatrix}$$

Assim:

$$\det(H(x,0)) = \begin{vmatrix} \frac{6}{x^4} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{x^4} \end{vmatrix} = -\frac{12}{x^8} < 0, \quad \forall x \in [1,3]$$

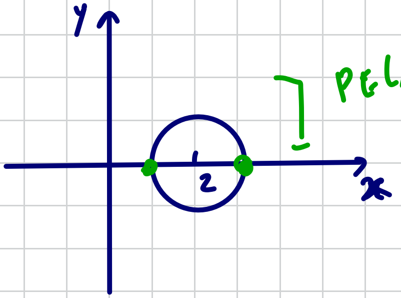
Então, os pontos da forma $(x,0)$ são todos pontos de sela, $\forall x \in [1,3]$.

- $$\underset{y \neq 0}{H(0,y)} = \begin{bmatrix} \frac{-2\cancel{y^2}}{\cancel{y^6}_4} & 0 \\ 0 & \frac{6\cancel{y^2}}{\cancel{y^6}_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{y^4} & 0 \\ 0 & \frac{6}{y^4} \end{bmatrix}; \quad y \neq 0$$

Disso;
$$\det[H(0,y)] = \begin{vmatrix} -\frac{2}{y^4} & 0 \\ 0 & \frac{6}{y^4} \end{vmatrix} = \frac{-12}{y^8} < 0, \quad \forall y \in (-1,0) \cup (0,1)$$

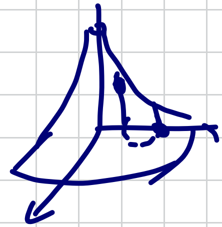
Logo, todos os pontos da forma $(0,y)$, com $y \neq 0$, $y \in (-1,0) \cup (0,1)$ são pontos de sela para $f$.

Portanto, como $\Omega$ é compacto, o máximo e o mínimo ocorrerão na fronteira, ou seja, no conjunto onde $(x-2)^2 + y^2 = 1$.




PELA SIMETRIA TOMAMOS $0<y\leq 1$.

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$$



Na fronteira de $\Omega$ podemos escrever:

$$(x-2)^2+y^2=1$$

$$x^2-4xy+4+y^2=1$$

$$x^2+y^2=1-4+4xy$$

$x^2+y^2=4xy-3$. Assim, temos que, sobre a fronteira $\partial\Omega$, tem-se:

$$\Rightarrow f(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}=\frac{1}{4xy-3},$$

onde $1\leq x\leq 3$ e $\overbrace{0<y\leq 1}^{\text{SIMETRIA}}$, com $y\neq 0$.

Então, $f(x,y)$ será máximo quando $4xy-3$ for mínimo (pois temos $\frac{1}{4xy-3}$)

Neste caso, $4xy-3$ será mínimo quando $x=1$ e $y=0$: $4.(1).(0)-3=-3$

Ou seja, ponto de máximo em $A(1,0)$

Do mesmo modo, $f(x,y)=\frac{1}{4xy-3}$ será mínimo quando $4xy-3$ for máximo; e isso ocorre quando $x=3$ e $y=1$:

$$4.(3).(1)-3=9$$

Ou seja, obtemos um ponto de mínimo em $B(3,1)$.