CÁLCULO 3, TURMA T2: **11/05/26 - AULA 18**

Encerramos a aula passada estudando os conceitos de pontos extremos.

Lembrando: dada $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ com $a \in \text{int}(\Omega)$, dizemos que a é um ponto de <u>MÁXIMO LOCAL</u> se $\exists\, \delta > 0$ tal que $f(a) \geq f(x)$, $\forall x \in B_\delta(a)$.

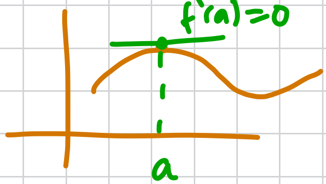
Se esta desigualdade for verdadeira $\forall x \in \Omega$, então o ponto a chama-se <u>MÁXIMO GLOBAL</u> ou <u>MÁXIMO ABSOLUTO</u>. Analogamente para mínimo.

Em qualquer dos casos tais pontos são chamados de <u>EXTREMOS</u> (RELATIVOS ou ABSOLUTOS).

No que segue apresentamos um resultado importante:

<u>TEOREMA</u>: Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $a \in \text{int}(\Omega)$. Se $a \in \Omega$ for um ponto extremo, então $\nabla f(a) = \vec{0}$.

Obs: No Cálculo 1, o resultado equivalente a este é: Se $f: \Omega \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é derivável em a, onde a é um ponto extremo, então $f'(a) = 0$.



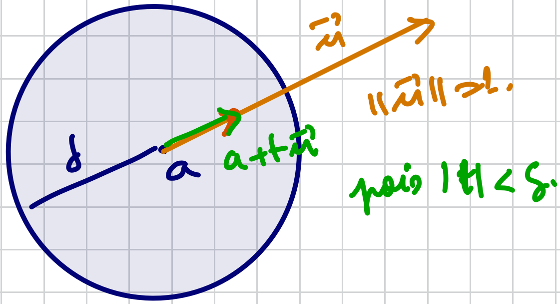
DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA: Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ diferenciável em $a \in \text{int}(\Omega)$, onde a é um ponto extremo de f. Sem perda de generalidade, assuma que a seja um ponto de mínimo relativo de f. Assim, $\exists \delta > 0$ tal que

$$f(x) \geq f(a) \; ; \; \forall x \in B_\delta(a).$$

Tome $\vec{u} \in \mathbb{R}^m$, com $\|\vec{u}\| = 1$. Escolha $t \in \mathbb{R}$ com $|t| < \delta$.

Assim, tem-se que

$$a + t\vec{u} \in B_\delta(a).$$



Disso, garante-se que

$$f(a+tu) \geqslant f(a)$$ [pois a é ponto de mínimo]

Assim:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\overbrace{f(a+t\vec{u})-f(a)}^{\geqslant 0}}{\underbrace{t}_{>0}} \geqslant 0.$$

Por outro lado,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a) = \lim_{t\to 0^-} \frac{\overbrace{f(a+t\vec{u})-f(a)}^{\geqslant 0}}{\underbrace{t}_{<0}} \leqslant 0$$

Ou seja, obtemos:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a) \geqslant 0 \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a) \leqslant 0$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a) = 0$$

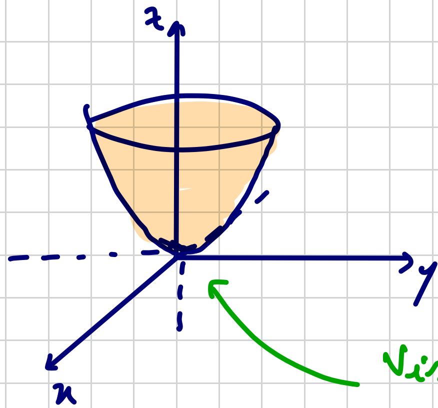
Então:

$$0 = \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a) = \nabla f(a) \cdot \vec{u}.$$

$\Longrightarrow \nabla f(a) \cdot \vec{u} = 0$, e como $\vec{u} \neq \vec{0}$,

pois $\|\vec{u}\| = 1$, segue que $\nabla f(a) = \vec{0}$. $\square$

EXEMPLO: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + y^2$



Visualmente já vemos que $(0,0)$ é um ponto extremo (no caso, de mínimo)

Disso, tem-se que

$$\nabla f(0,0) = \vec{0}.$$ De fato:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x} , \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

$$\Rightarrow \nabla f = (2x, 2y).$$ Assim:

$$\nabla f(0,0) = (2.0 , 2.0) = (0,0) = \vec{0}.$$

Obs: A recíproca do teorema acima, no entanto, em geral, é falsa. Ou seja, o fato de que $\nabla f(a) = \vec{0}$, não é garantia de que o ponto $a \in \mathrm{int}(\Omega)$ seja um ponto extremo para f.

Por exemplo, seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = x^2 - y^2 \quad \text{(hiperboloide)}$$

Neste caso, $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$

$$\nabla f = (2x, -2y)$$

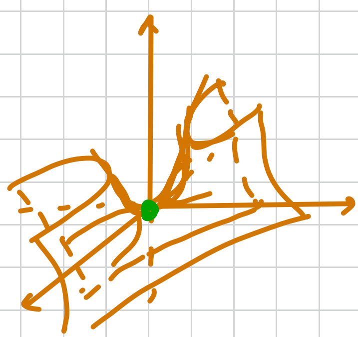
Note que $\nabla f(0,0) = (2 \cdot 0, -2 \cdot 0) = (0,0)$

Mas, a origem $(0,0)$ não é ponto extremo (é um ponto chamado de PONTO DE SELA)

$z = x^2 - y^2$.

$z = k$:

$x^2 - y^2 = k$ (HIPÉRBOLES)



$k > 0$:

$x^2 - y^2 = k$

eixo real

$k < 0$:

$y^2 - x^2 = \underbrace{-k}_{>0}$

eixo real.

Isto inspira o seguinte conceito:

Def.: Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ diferenciável em $a \in \text{int}(\Omega)$. Dizemos que a é um ponto crítico de f se $\nabla f(a) = \vec{0}$.

Vejamos exemplos:

Ex.: Achar os pontos críticos das funções:

(a) $f(x,y) = x^2 + 4xy - y^2 - 8x - 6y$.

Solução: Os pontos críticos são os pontos onde $\nabla f(x,y) = (0,0)$. Assim:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

$$\Rightarrow \nabla f = (2x + 4y - 8, 4x - 2y - 6)$$

Então $\nabla f = (0,0) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 2x + 4y - 8 = 0 \\ 4x - 2y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

$x = 4 - 2y$

$$2x - y = 3$$

$$2.(4-2y) - y = 3$$

$$8 - 4y - y = 3$$

$$-5y = -5$$

$$\Rightarrow \boxed{y = 1}$$

$$x = 4 - 2y$$

$$x = 4 - 2.(1)$$

$$\boxed{x = 2}$$

PONTO CRÍTICO ENCONTRADO: $(2,1)$.

(b) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $f(x,y) = x + y \cdot \operatorname{sen} x$.

pontos críticos: onde $\nabla f = \vec{0} = (0,0)$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

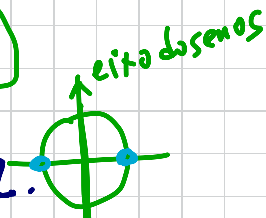
$$\nabla f = (1 + y \cdot \cos x, \operatorname{sen} x)$$

Assim: $\nabla f = \vec{0} \Leftrightarrow (1 + y \cdot \cos x, \operatorname{sen} x) = (0,0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + y \cdot \cos x = 0 \\ \boxed{\operatorname{sen} x = 0} \end{cases}$$

$\Downarrow$

$x = k\pi, \ \forall k \in \mathbb{Z}.$



$$\Rightarrow 1 + y\cdot \underbrace{\cos k\pi}_{\pm 1} = 0 \iff \begin{cases} 1 + y = 0 \\ 1 - y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

<u>CONCLUSÃO</u>: os pontos críticos encontrados são:

$$(x,y) = (k\cdot\pi, 1) \quad \text{ou}$$

$$(x,y) = (k\pi, -1) \quad , \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

O próximo resultado estabelece uma classificação dos pontos críticos. Antes, porém, vamos definir um importante conceito.

<u>Def.</u>: Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável, com derivadas parciais segundas contínuas. Definimos a MATRIZ HESSIANA de f por:

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

Obs.: Este conceito pode ser extendido para funções de $\mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}$:

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{x_m \partial x_2} & \cdots & & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2} \end{bmatrix}_{m \times m}$$

Isto posto, temos o seguinte resultado:

TEOREMA: Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $a \in \text{int}(\Omega)$, com a um ponto crítico de f, e tal que as derivadas parciais segundas sejam contínuas. Então;

(i) se $\det H(a) > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) > 0$, o ponto a é um ponto de mínimo local.

(ii) se $\det H(a) > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) < 0$, o ponto a é um ponto de máximo local.

(iii) se $\det H(a) < 0$, o ponto a é um ponto de sela.

(iv) se $\det H(a) = 0$, o teste é inconclusivo.

A demonstração desse resultado será omitida. No entanto, a mesma pode ser encontrada, por exemplo em LEITHOLD, Vol 2.

$\square$

Vejamos alguns exemplos de aplicações:

EXEMPLO: Encontre os pontos críticos de cada função abaixo, classificando-os.

(a) $f(x,y) = x^2 - y^2$

pontos críticos: onde $\nabla f = \vec{0}$.

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (2x, -2y)$$

$$\nabla f = 0 \iff \begin{cases} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

PONTO CRÍTICO ENCONTRADO: $(0,0)$

matriz hessiana:

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} \text{ ; onde:}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \ ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y$$

- $f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2x) = 2$
- $f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(2x) = 0$
- $f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(-2y) = 0$
- $f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(-2y) = -2$

Logo, $H(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

Assim, $H(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, e então:

$$\det H(0,0) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2\cdot(-2) - 0\cdot 0 = -4 < 0$$

$-$ $+$

Logo, $(0,0)$ é um ponto de sela para f.

(b) $f(x,y) = 2x^4 + y^2 - x^2 - 2y$.

PONTOS CRÍTICOS: onde $\nabla f = \vec{0} = (0,0)$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

$$\nabla f = \left(8x^3 - 2x, \; 2y - 2 \right).$$

Logo: $\nabla f = (0,0) \iff$

$$\begin{cases} 8x^3 - 2x = 0 \iff 2x(4x^2 - 1) = 0 \\ 2y - 2 = 0 \iff \boxed{y = 1} \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$x = 0$

$4x^2 - 1 = 0$

$\Updownarrow$

$\boxed{x = 0 \text{ ou } x = \pm \frac{1}{2}}$

PONTOS CRÍTICOS ENCONTRADOS (x,y):

$A(0,1)$; $B\left(\frac{1}{2}, 1\right)$; $C\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$.

No que segue, classificaremos estes pontos críticos.

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} \; ; \text{ onde:}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 8x^3 - 2x \; ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 2$$

- $f_{xx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(8x^3 - 2x\right) = 24x^2 - 2$

- $f_{xy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \, \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(8x^3 - 2x\right) = 0$

- $f_{yx} = 0$ (TEOR. DE SCHWARZ)

- $f_{yy} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(2y - 2\right) = 2.$

Assim:

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} 24x^2 - 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Disso, examinando para cada ponto, teremos:

- $A(0,1)$:

$$H(0,1) = \begin{bmatrix} 24 \cdot 0^2 - 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\det(H(0,1))} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4 - 0 = \underbrace{-4 < 0}.$$

Logo $A(0,1)$ é um ponto de sela.

- $B(\frac{1}{2},1)$: Já temos $H(x,y) = \begin{bmatrix} 24x^2-2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Assim:

$$H(\tfrac{1}{2},1) = \begin{bmatrix} 24\cdot(\frac{1}{2})^2-2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Logo: $\underbrace{\det(H(\tfrac{1}{2},1))} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 0 = \underbrace{8 > 0}$

Portanto o ponto crítico $B(\frac{1}{2},1)$ é um ponto extremo. Para ver se é MÁX. ou MIN, calculamos $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\frac{1}{2},1)$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\tfrac{1}{2},1) = 24\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 - 2 = 4 > 0$$

Disso, o ponto $B(\frac{1}{2},1)$ é um ponto de mínimo relativo.

• $C\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$:

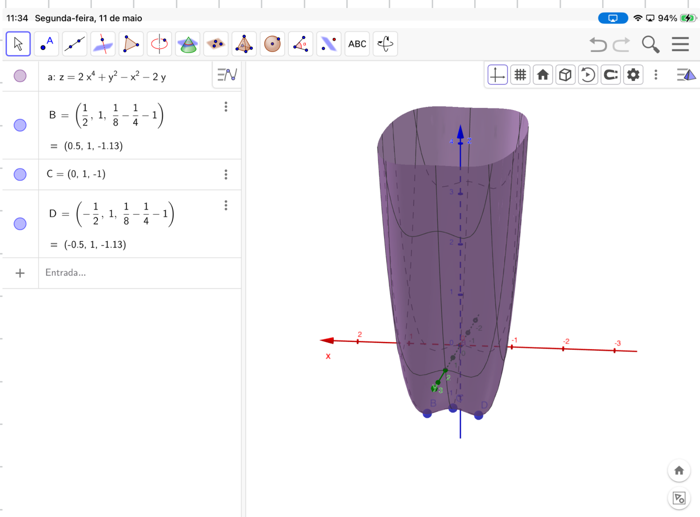
$$H\left(-\frac{1}{2}, 1\right) = \begin{bmatrix} 24\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{\det H\left(-\frac{1}{2}, 1\right)} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 0 = \underline{8 > 0}.$$

Logo, o ponto $C\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ é um extremo relativo. Assim:

$$\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(-\frac{1}{2}, 1\right)} = 24\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 2 = \underline{4 > 0}.$$

Portanto $C\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ também é um ponto de mínimo relativo para f.



(c) $f(x,y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \operatorname{sen}(x+y)$

Resp.: $x = y = \frac{\pi}{3}$ PONTO DE MÁXIMO.