CÁLCULO 3, TURMA T2

08/05/26 – AULA 17

Na aula passada estudamos o conceito de derivada direcional: dada $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $a \in \text{int}(\Omega)$ e $\vec{u} \in \mathbb{R}^m$ tal que $\|\vec{u}\| = 1$, então, define-se: (f diferenciável)

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t\vec{u}) - f(a)}{t}.$$

Vimos também que:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a) = (d_a f)(\vec{u}) = \nabla f(a) \cdot \vec{u}$$

PRODUTO ESCALAR

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) \right)$$

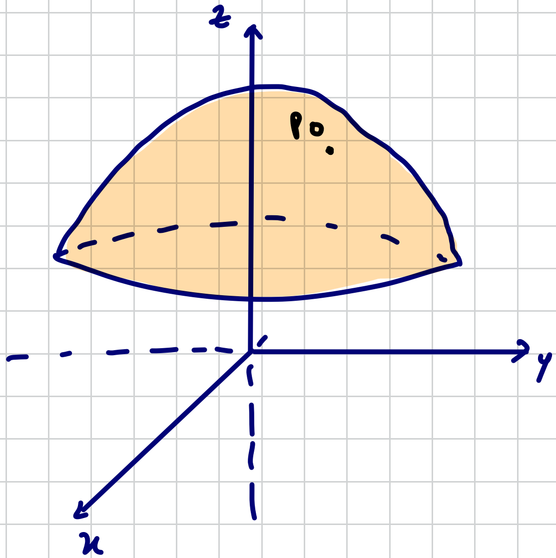
Vimos também que a máxima taxa de variação se dá no ∇f, e o valor é $\|\nabla f\|$, e é na mesma direção que o vetor $\vec{u}$.

PLANO TANGENTE A UMA SUPERFÍCIE DO $\mathbb{R}^3$.

Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $z = f(x,y)$ uma função diferenciável. O gráfico de f será uma superfície $S \subset \mathbb{R}^3$, cuja equação é expressa por $f(x,y) - z = 0$

Denotando por $F(x,y,z) = f(x,y) - z$, então a superfície S é descrita pela equação

$$F(x,y,z) = 0.$$



$P_0(x_0, y_0, \underbrace{f(x_0,y_0)}_{z_0})$

Seja $P_0(x_0, y_0, f(x_0,y_0)) \in S$.

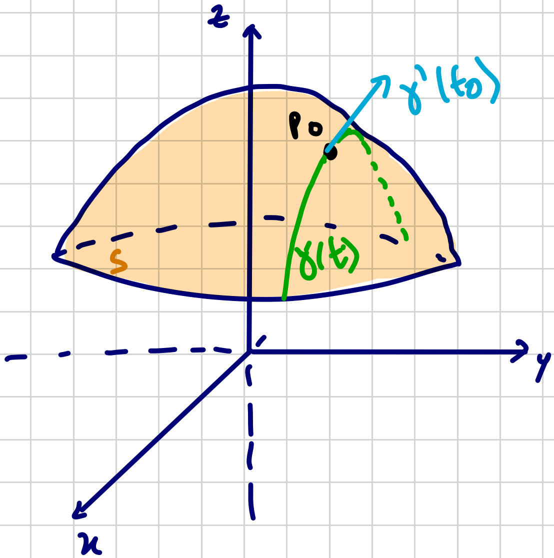
Nosso objetivo é determinar a equação do plano (π), tangente à superfície S no ponto P_0.

Seja $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$

uma curva qualquer sobre S que passe pelo ponto P_0.

Assim, $\exists\, t_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$P_0 = \gamma(t_0) = (x(t_0), y(t_0), z(t_0)).$$



O vetor tangente à γ no ponto P_0 é dado por

$$\gamma'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$$

Considerando a equação da superfície S:

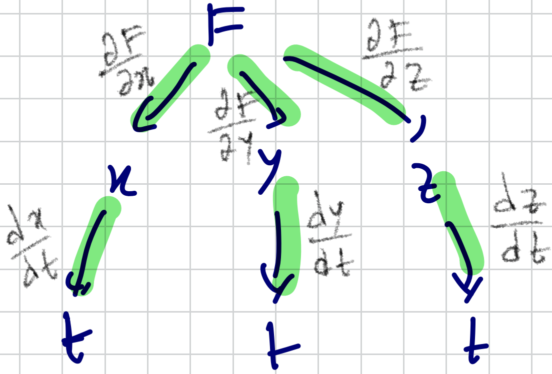
$$F(x, y, z) = 0,$$

sobre a curva $\gamma(t)$, teremos:

$$F(\gamma(t)) = F(x(t), y(t), z(t)) = 0$$

Pela regra da cadeia, derivando na variável t,

obtemos:



$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}\right)\Bigg|_{t_0}=0$$

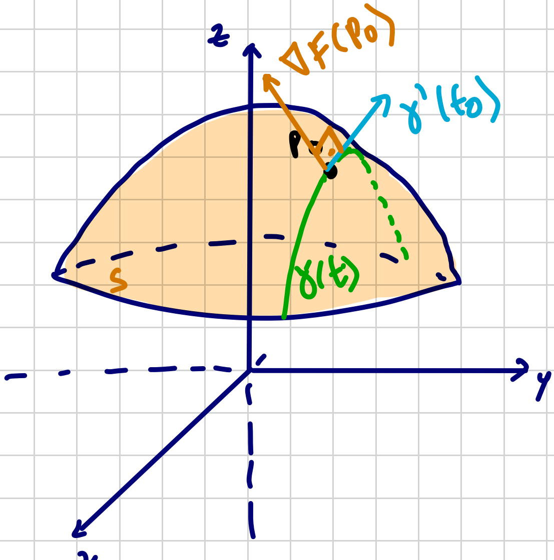
$$\underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right)\Bigg|_{t_0}}_{\nabla F(P_0)}\cdot\underbrace{\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt},\frac{dz}{dt}\right)\Bigg|_{t_0}}_{\gamma'(t_0)}=0$$

PRODUTO ESCALAR

$$\nabla F(P_0)\cdot\gamma'(t_0)=0$$

Logo, $\nabla F(P_0)$ é ortogonal a $\gamma'(t_0)$

Lembre-se da GEOMETRIA ANALÍTICA: dados $\vec{u},\vec{v}\in\mathbb{R}^3$, se $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$, então $\vec{u}\perp\vec{v}$]



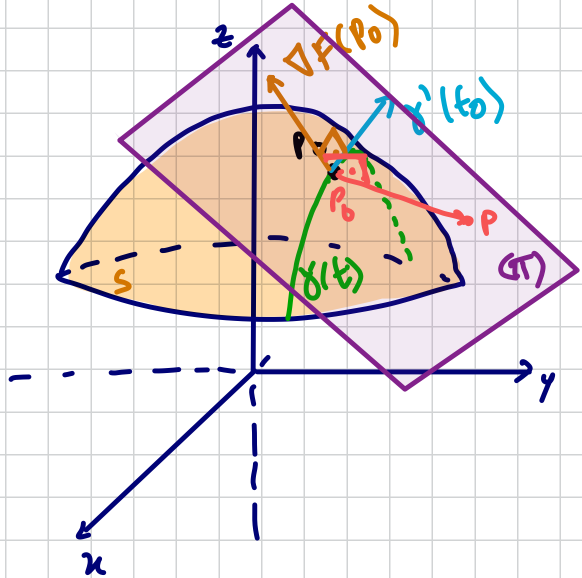
Assim, sendo (π) o plano tangente à S em P_0, que queremos determinar, o vetor $\nabla F(P_0)$ serve como vetor normal à (π) em P_0.

Seja $P(x,y,z) \in (\pi)$ um ponto qualquer sobre o plano a ser determinado. Assim, o vetor $\overrightarrow{P_0P} = P - P_0$ está em (π) e será ortogonal à $\nabla F(P_0)$. Ou seja:

$$\boxed{\nabla F(P_0) \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0}$$

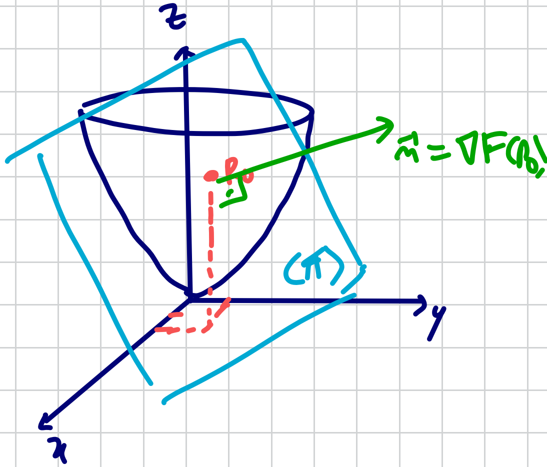
→ eq. do plano (π) tangente à S no ponto P_0.

PRODUTO ESCALAR



EXEMPLOS:

01) Obtenha a equação do plano tangente à superfície S dada por $f(x,y) = x^2+y^2$ no ponto $P_0(2,1,5)$.



SOLUÇÃO:

Seja $F(x,y,z) = f(x,y) - z$

$\Rightarrow F(x,y,z) = x^2+y^2-z.$

Assim: $\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)$

$$\nabla F = (2x, 2y, -1)$$

Logo, $\nabla F(P_0) = \nabla F(2,1,5) = (2.(2), 2.(1), -1)$

$$\nabla F(P_0) = (4, 2, -1).$$

Assim, a equação do plano (π) será dada por

$$(\pi): \quad \nabla F(P_0) \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0 \quad , \text{onde} \quad P(x,y,z) \in (\pi);$$

e $\quad \overrightarrow{P_0P} = P - P_0 = (x,y,z) - (2,1,5)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{P_0P} = (x-2, y-1, z-5)$$

Disso, obtemos:

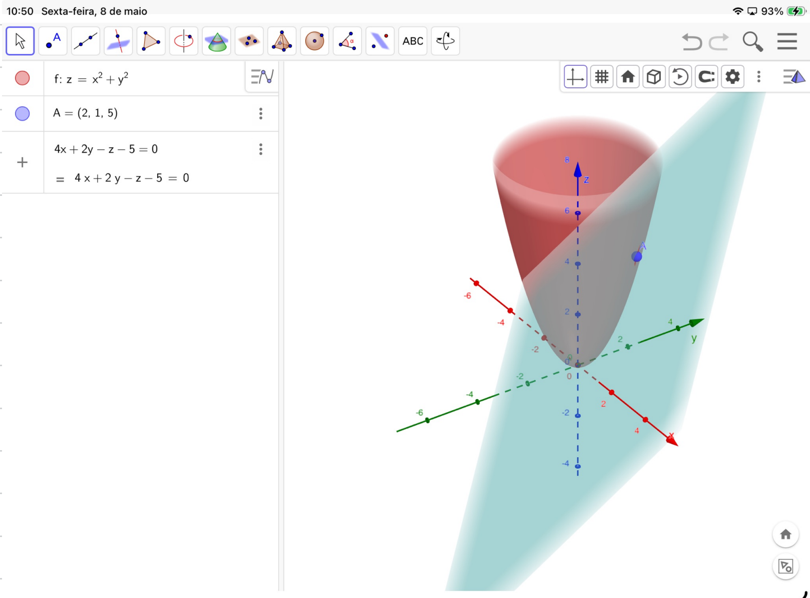
$$(\pi): \quad \nabla F(P_0) \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$$

$$(\pi): \quad (4,2,-1) \cdot (x-2, y-1, z-5) = 0$$

$$(\pi): \quad 4(x-2) + 2(y-1) - 1.(z-5) = 0$$

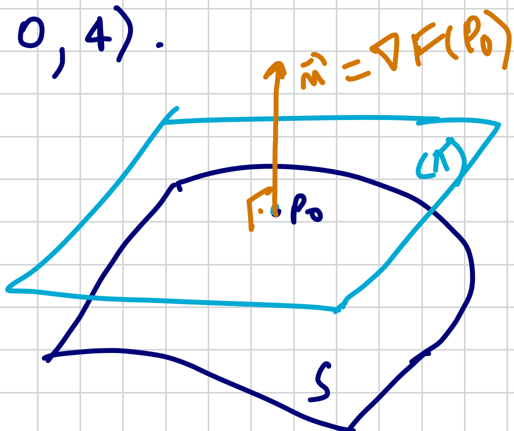
$$(\pi): \quad 4x + 2y - z - 8 - 2 + 5 = 0$$

$$\boxed{(\pi): \quad 4x + 2y - z - 5 = 0}$$



02) Obter a equação do plano tangente à superfície dada por $f(x,y) = x^2 + y - x\,\text{sen}\,y$ no ponto $P_0\,(2, 0, 4)$.

Solução:



Seja $F(x,y,z) = f(x,y) - z$,

ou seja,

$$F(x,y,z) = x^2 + y - x\cdot\text{sen}\,y - z$$

Assim:
$$\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right)$$

$$\Rightarrow \quad \nabla F = \left(2x - \text{sen}\, y, 1 - x\cos y, -1 \right)$$

Logo;

$$\nabla F(P_0) = \nabla F(2,0,4) = (2(2), 1 - 2.\cos 0, -1)$$

$$\Rightarrow \nabla F(P_0) = (4, -1, -1)$$

Dado $P(x,y,z) \in (\pi)$; então

$$\overrightarrow{P_0P} = P - P_0 = (x,y,z) - (2,0,4)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{P_0P} = (x-2, y, z-4).$$

Disso, a eq. do plano (π) será:

$$(\pi): \nabla F(P_0) . \overrightarrow{P_0P} = 0$$

$$(\pi): (4,-1,-1).(x-2, y, z-4) = 0$$

$$(\pi): 4(x-2) - 1.(y) - 1.(z-4) = 0$$

$$(\pi): 4x - y - z - 8 + 4 = 0$$

$$\boxed{(\pi): 4x - y - z - 4 = 0}$$

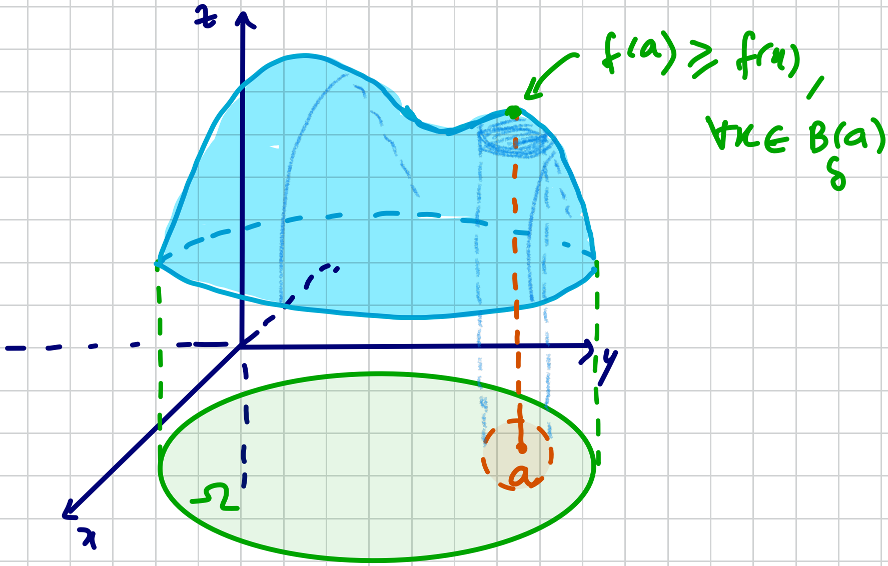
MÁXIMOS E MÍNIMOS

Nesta seção vamos estudar os conceitos de máximo e mínimo de funções escalares de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$, do mesmo modo que fora estudado outrora no cálculo 1.

Def.1 Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função escalar e seja $a \in \operatorname{int}(\Omega)$. Dizemos que o ponto a é um ponto de MÁXIMO LOCAL se $\exists\, \delta > 0$ tal que

$$f(a) \geq f(x), \quad \forall x \in B_\delta(a).$$

Abaixo temos uma ilustração para $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.



Def.: Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função escalar e seja $a \in \mathrm{int}(\Omega)$. Dizemos que o ponto a é um ponto de MÍNIMO LOCAL se $\exists\, \delta > 0$ tal que

$$f(a) \leq f(x), \quad \forall x \in B_\delta(a).$$

Def.: Dizemos que $a \in \mathrm{int}(\Omega)$ é um ponto de MÁXIMO GLOBAL ou ABSOLUTO para a função $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ se

$$f(a) \geq f(x), \quad \forall x \in \Omega$$

Do mesmo modo, $a \in \text{int}(\Omega)$ é um ponto de MÍNIMO GLOBAL para $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, se

$$f(a) \leq f(x), \quad \forall x \in \Omega.$$

Def.: Dizemos que um ponto de MÁXIMO ou MÍNIMO é um PONTO EXTREMO (extremo relativo se for máx. ou mín. relativo e extremo absoluto se for máx. ou mín. absoluto). O respectivo valor $f(a)$ chama-se valor absoluto.

Na próxima aula estudaremos propriedades e classificação dos extremos.