No final da aula passada introduzimos o conceito de derivada direcional. Dada $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função escalar, $a \in \text{int}(\Omega)$ e $\vec{u} \in \mathbb{R}^m$ com $\|\vec{u}\| = 1$.

Definimos, então, a derivada de f na direção do vetor $\vec{u}$, no ponto a, por:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t.\vec{u}) - f(a)}{t}$$

No caso de f de $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$, tomando, por exemplo, o vetor $\vec{j} = (0,1)$, teremos, para $a = (x,y)$:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{j}}(x,y) = \lim_{t \to 0} \frac{f((x,y) + t.(0,1)) - f(x,y)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(x, y+t) - f(x,y)}{t} = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

Ou seja, em $\mathbb{R}^m$, tomando $e_i = (0, 0, \dots, \underset{\uparrow}{1}, \dots 0)$,

na posição i

então, $\frac{\partial f}{\partial \vec{e}_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}$.

Ex.: Dado $f(x,y) = xy + y^2$; calcule

$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}$, sendo $\vec{u} = \left(\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$

SOLUÇÃO: Note que: $\|\vec{u}\| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{5}{9}} = 1.$

Então:

$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t\vec{u}) - f(a)}{t}$; onde $a = (x,y)$

$\vec{u} = \left(\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$.

Assim:

$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}} = \lim_{t \to 0} \frac{f\left((x,y) + t \cdot \left(\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right)\right) - f(x,y)}{t} =$

$= \lim_{t \to 0} \frac{f\left(x + \frac{2}{3}t, y + \frac{\sqrt{5}}{3}t\right) - f(x,y)}{t} =$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\left(x + \frac{2}{3}t\right)\cdot\left(y + \frac{\sqrt{5}}{3}t\right) + \left(y + \frac{\sqrt{5}}{3}t\right)^2 - \left[xy + y^2\right]}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{xy + \frac{\sqrt{5}}{3}xt + \frac{2}{3}ty + \frac{2\sqrt{5}}{9}t^2 + y^2 + 2\frac{\sqrt{5}}{3}ty + \frac{5}{9}t^2 - xy - y^2}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{t \cdot \left[\frac{\sqrt{5}}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2\sqrt{5}}{9}t + \frac{2\sqrt{5}}{3}y + \frac{5}{9}t\right]}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{5}}{3}x + \frac{2}{3}y + \underbrace{\frac{2\sqrt{5}}{9}t}_{0} + \frac{2\sqrt{5}}{3}y + \underbrace{\frac{5}{9}t}_{0}$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2\sqrt{5}}{3}y$$

Naturalmente, o cálculo da derivada direcional pela definição é bastante trabalhoso. Felizmente o próximo resultado tornará o cálculo mais simples.

TEOREMA: Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $a \in \text{int}(\Omega)$. Então, a derivada na direção de um vetor unitário $\vec{u}$ é dada por:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a) = f'(a) \cdot \vec{u}.$$

Obs: Na notação acima,

$$f'(a) \cdot \vec{u} = (d_a f)(\vec{u}).$$

↑ PRODUTO MATRICIAL

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA: Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ diferenciável em $a \in \text{int}(\Omega)$. Dado $h \in \mathbb{R}^m$ tal que $a + h \in \text{int}(\Omega)$, segue que:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + \|h\| \cdot r(h),$$

onde $r(h) \to 0$ quando $h \to 0$.

Em particular, tomando $h = t \cdot \vec{u}$, teremos:

$$f(a + t\vec{u}) = f(a) + f'(a) \cdot (t\vec{u}) + \|t\vec{u}\| \cdot r(t\vec{u})$$

$$\Rightarrow f(a+t\vec{u}) - f(a) = f'(a).(t\vec{u}) + |t|.\|\vec{u}\|.r(t\vec{u})$$

Assim, teremos:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+t\vec{u}) - f(a)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f'(a).(t.\vec{u}) + |t|.\|\vec{u}\|.r(t\vec{u})}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{t.f'(a).\vec{u}}{t} + \lim_{t\to 0} \frac{|t|}{t}.\|\vec{u}\|.r(t\vec{u})$$

(± 1; $\|\vec{u}\| = 1$)

$$= f'(a).\vec{u} \pm \lim_{t\to 0} r(t\vec{u}) = f'(a).\vec{u}$$

($r(0) \to 0$) □

Obs.! Como $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^1$, então

$$f'(a) = [d_a f]_{1\times m} = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} \quad \cdots \quad \frac{\partial f}{\partial x_m}\right]_{1\times m}$$

Isto inspira definir o seguinte:

Def.: Dada a função $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, definimos o gradiente de f por:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m} \right).$$

Ex.: $f(x,y,z) = \cos(xy) + y^2 z$, $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

Então:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

$$= \left(-\operatorname{sen}(xy)\, y, -\operatorname{sen}(xy)\, x + 2y \cdot z, y^2 \right)$$

$$= \left(-y \cdot \operatorname{sen}(xy), -x \operatorname{sen}(xy) + 2yz, y^2 \right)$$

De posse do conceito de ∇f, o teorema anterior pode ser simplificado no seguinte resultado:

COROLÁRIO: Se $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ for diferenciável em um ponto $a \in \text{int}(\Omega)$, então, dado $\vec{u}$ com $\|\vec{u}\| = 1$, tem-se que

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a) = \nabla f(a) \cdot \vec{u}$$

↑ PRODUTO ESCALAR.

DEMONSTRAÇÃO: De fato, basta notar que:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a) = f'(a) \cdot \vec{u} = (d_a f)(\vec{u}) =$$

↑ PRODUTO MATRICIAL

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \cdot u_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \cdot u_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) \cdot u_m =$$

$$= \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) \right)}_{\nabla f(a)} \cdot \underbrace{(u_1, u_2, \cdots, u_m)}_{\vec{u}}$$

$= \nabla f(a) \cdot \vec{u}$

↑ PRODUTO ESCALAR.

□

Ex.: Voltemos ao 1º exemplo da aula de hoje:

Dado $f(x,y) = xy + y^2$; calcule

$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}$, sendo $\vec{u} = \left(\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$.

Solução Vimos anteriormente que $\|\vec{u}\| = 1$.

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}} = \nabla f \cdot \vec{u}, \text{ onde:}$$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (y, x+2y)$$

Assim:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}} = \nabla f \cdot \vec{u} = (y, x+2y) \cdot \left(\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$$

$$= y \cdot \frac{2}{3} + (x+2y) \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{2}{3}y + \frac{\sqrt{5}}{3}x + \frac{2\sqrt{5}}{3}y$$

Como derivadas representam taxa de variação, o mesmo ocorre para a derivada direcional, conforme o seguinte resultado:

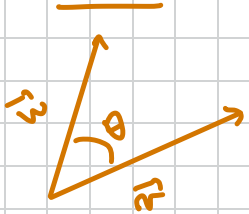
TEOREMA: A máxima taxa de variação de $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ é dada pelo vetor gradiente ∇f, e o seu valor máximo será $\|\nabla f\|$, na mesma direção do vetor $\vec{u}$.

DEMONSTRAÇÃO: Temos que

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}} = \nabla f \cdot \vec{u} \overset{(*)}{=} \|\nabla f\| \cdot \underbrace{\|\vec{u}\|}_{=1} \cdot \cos\theta =$$

$$= \|\nabla f\| \cdot \cos\theta.$$

(*) DA ALGA:



$$\cos\theta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|}$$

$$\Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos\theta.$$

Ou seja, a taxa de variação será:

$$\frac{df}{d\vec{u}} = \|\nabla f\| \cdot \cos\theta \text{ ; onde } \theta \text{ é o ângulo}$$

entre o vetor unitário $\vec{u}$ e o vetor gradiente.

A taxa de variação será máxima quando $\cos\theta = 1$, ou seja, $\theta = 0°$; neste caso, será ∇f, e terá valor $\|\nabla f\|$, na mesma direção que o vetor $\vec{u}$. □

EX.: (STEWART, VOL 2) Seja $f(x,y) = x \cdot e^y$.

(a) Determine a taxa de variação de f no ponto $P(2,0)$, na direção de P até $Q\left(\frac{1}{2}, 2\right)$.

(b) Em que direção f tem a máxima taxa de variação? Qual é essa máxima taxa de variação?

(a) Queremos $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(P)$; onde:

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{PQ}}{\|\overrightarrow{PQ}\|} \text{ ; onde}$$

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = \left(\frac{1}{2}, 2\right) - (2, 0) = \left(-\frac{3}{2}, 2\right)$$

$$\|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + (2)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = \frac{5}{2}$$

Assim: $\vec{u} = \frac{1}{\|\overrightarrow{PQ}\|} \cdot \overrightarrow{PQ} = \frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{3}{2}, 2\right) = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

Dizia:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(P) = \nabla f(P) \cdot \vec{u}, \text{ onde; para } f(x,y) = x e^y,$$

temos:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(e^y, x \cdot e^y\right)$$

$$\Rightarrow \nabla f(P) = \nabla f(2,0) = \left(e^0, 2 \cdot e^0\right) = (1, 2)$$

(x y)

Logo, obtemos:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(P) = \nabla f(P) \cdot \vec{u} = (1,2) \cdot \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

$$= 1 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) + 2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right) = -\frac{3}{5} + \frac{8}{5} = 1.$$

(b) A máxima taxa de variação se dá na direção do vetor $\vec{u} = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$, e será

$\nabla f(P)$ e será

$$\| \nabla f(P) \| = \| (1,2) \| = \sqrt{(1)^2 + (2)^2}$$

$$= \sqrt{1+4} = \sqrt{5} \; //$$