CÁLCULO 3, TURMA T2 04/05/26 - AULA 15

Encerramos a aula passada com o enunciado do teorema da regra da cadeia:

TEOREMA: (REGRA DA CADEIA) Sejam $f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ diferenciável em $a \in \operatorname{int}(\Omega)$; $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ diferenciável em $b = f(a)$. Então $g \circ f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ é diferenciável em a, com

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

Em notação de diferenciais:

$$\underbrace{\left[d_a\, g \circ f\right]}_{k \times m} = \underbrace{\left[d_{f(a)}\, g\right]}_{k \times n} \cdot \underbrace{\left[d_a f\right]}_{n \times m}$$

PRODUTO MATRICIAL.

A demonstração deste teorema exige resultados não abordados em um curso de cálculo clássico. Por essa razão, fica omitido.

Façamos um exemplo de aplicação.

Ex: Dadas $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = (x^2 - y^2, xy, x^2y^2)$;

$g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$; $g(x,y,z) = (x+y^2, x+y+z, xyz, z)$

Determine $(g \circ f)'(a)$; onde $a = (1,2)$.

Solução: Uma forma de resolver o problema seria calcular primeiro $g \circ f$ e depois sua derivada $(g \circ f)'(a)$ [matriz jacobiana].

Porém, não faremos assim. Usaremos a regra de cadeia.

Temos $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$f(x,y) = (\underbrace{x^2 - y^2}_{f_1}, \underbrace{xy}_{f_2}, \underbrace{x^2y^2}_{f_3})$$

$g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$;

$$g(x,y,z) = (\underbrace{x+y^2}_{g_1}, \underbrace{x+y+z}_{g_2}, \underbrace{x \cdot y \cdot z}_{g_3}, \underbrace{z}_{g_4})$$

Na notação de diferenciais, temos:

$$\underset{4\times 2}{\left[d_a\, g\circ f \right]} = \underset{4\times 3}{\left[d_{f(a)}\, g \right]} \cdot \left[d_a f \right]_{3\times 2} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \\ \frac{\partial g_3}{\partial x} & \frac{\partial g_3}{\partial y} & \frac{\partial g_3}{\partial z} \\ \frac{\partial g_4}{\partial x} & \frac{\partial g_4}{\partial y} & \frac{\partial g_4}{4 z} \end{bmatrix}_{f(a)} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{bmatrix}_a$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2y & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ yz & xz & xy \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{f(a)} \cdot \begin{bmatrix} 2x & -2y \\ y & x \\ 2xy^2 & 2x^2y \end{bmatrix}_a ;$$

onde $a = (1,2)$

$$\Rightarrow f(a) = f(1,2) = (1^2 - 2^2,\ 1.2,\ 1^2.2^2)$$

$$\Rightarrow f(a) = (-3,\ 2,\ 4)$$

Assim:

$$[d_a\, g \circ f] = \begin{bmatrix} 1 & 2y & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ yz & xz & xy \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{\underset{x\ \ y\ \ z}{(-3,2,4)}} \cdot \begin{bmatrix} 2x & -2y \\ y & x \\ 2xy^2 & 2x^2y \end{bmatrix}_{\underset{x\ \ y}{(1,2)}}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2.2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2.4 & -3.4 & -3.2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2.1 & -2.(2) \\ 2 & 1 \\ 2.1.(2)^2 & 2(1)^2.2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 8 & -12 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 1 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1\cdot 2 + 4\cdot 2 + 0\cdot 8 & 1\cdot(-4) + 4\cdot 1 + 0\cdot 4 \\ 1\cdot 2 + 1\cdot 2 + 1\cdot 8 & 1\cdot(-4) + 1\cdot 1 + 1\cdot 4 \\ 8\cdot 2 + (-12)\cdot 2 + (-6)\cdot 8 & 8\cdot(-4) + -12\cdot 1 + -6\cdot 4 \\ 0\cdot 2 + 0\cdot 2 + 1\cdot 8 & 0\cdot(-4) + 0\cdot 1 + 1\cdot 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 12 & 1 \\ -32 & -68 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow d_a g\circ f = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 12 & 1 \\ -32 & -68 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}_{4\times 2}$$

Para funções escalares (i.e., de $\mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}$) temos uma versão mais simples, conforme o teorema:

TEOREMA! (REGRA DA CADEIA PARA FUNÇÕES ESCALARES)

Seja $u = f(x,y)$ uma função de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$, diferenciável, com $x = x(r,s)$ e $y = y(r,s)$ diferenciáveis, tais que $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial x}{\partial r}$, $\frac{\partial x}{\partial s}$, $\frac{\partial y}{\partial r}$ e $\frac{\partial y}{\partial s}$ existam.

Então:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} ,$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} .$$

DEMONSTR.: Seja $f(x,y) = u$ nas hipóteses do teorema. Então, como u é diferenciável, então o seu incremento pode ser expresso por:

$$\boxed{\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\Delta y + \varepsilon_1\cdot\Delta x + \varepsilon_2\cdot\Delta y,} \quad (*)$$

onde $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \underset{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$

Vamos determinar $\frac{\partial u}{\partial r}$. Neste caso, fixamos s.

Assim; como $x = x(r,s)$; $y = y(r,s)$; então:

$$\Delta x = x(r+\Delta r, s) - x(r,s) \quad e$$

$$\Delta y = y(r+\Delta r, s) - y(r,s).$$ Assim,

segue que $(*)$ fica:

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\left[x(r+\Delta r, s) - x(r,s)\right] +$$

$$+ \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\left[y(r+\Delta r, s) - y(r,s)\right] + \varepsilon_1\cdot\Delta x + \varepsilon_2\Delta y$$

Dividindo por $\Delta r \neq 0$, vamos obter:

$$\frac{\Delta u}{\Delta r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{x(r+\Delta r, s) - x(r,s)}{\Delta r} +$$

$$+ \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{y(r+\Delta r, s) - y(r,s)}{\Delta r} + \varepsilon_1 \cdot \frac{\Delta x}{\Delta r} + \varepsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta r}$$

Tomando o limite com $\Delta r \to 0$, encontramos:

$$\underbrace{\lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta r}}_{\frac{\partial u}{\partial r}} = \frac{\partial u}{\partial x} \underbrace{\lim_{\Delta r \to 0} \frac{x(r+\Delta r, s) - x(r,s)}{\Delta r}}_{\frac{\partial x}{\partial r}} +$$

$$+ \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta r \to 0} \frac{y(r+\Delta r, s) - y(r,s)}{\Delta r}}_{\frac{\partial y}{\partial r}} +$$

$$+ \lim_{\Delta r \to 0} \underbrace{\varepsilon_1}_{0} \cdot \underbrace{\frac{\Delta x}{\Delta r}}_{\frac{\partial x}{\partial r}} + \lim_{\Delta r \to 0} \underbrace{\varepsilon_2}_{0} \cdot \underbrace{\frac{\Delta y}{\Delta r}}_{\frac{\partial y}{\partial r}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r}$$

Do mesmo modo prova-se a outra igualdade

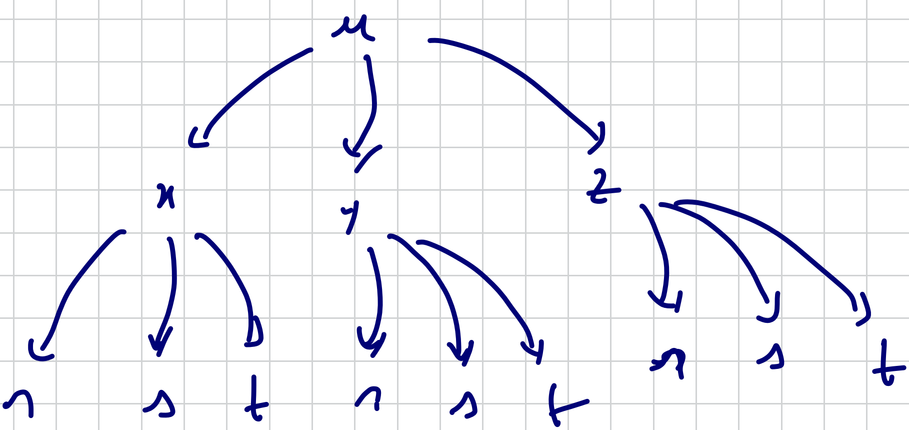
$\square$

Este resultado se aplica para mais variáveis, desde que a função seja escalar.

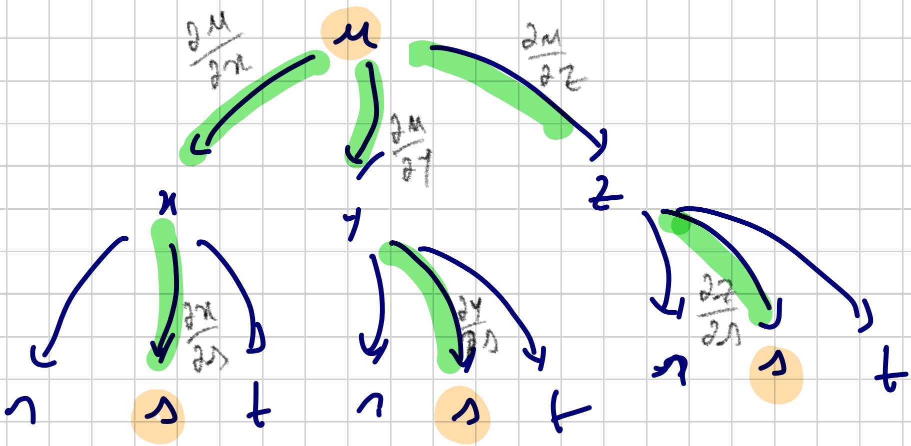
Ex.: $u = f(x, y, z)$, onde

$$x = x(r, s, t)$$
$$y = y(r, s, t)$$
$$z = z(r, s, t)$$

O que se pode fazer para ajudar a memorizar/construir a fórmula é o esquema em árvore como segue:



Assim, por exemplo, como seria $\dfrac{\partial u}{\partial s}$?



Disso:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial s}.$$

E assim para as demais.

Vejamos um exemplo:

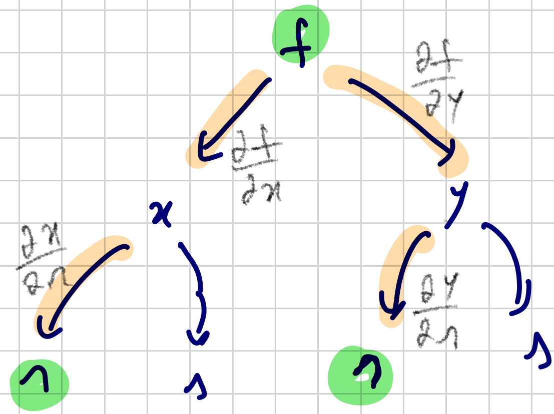
Ex.: Seja $f(x,y) = x^2y^2$,

onde $x = r^2+s^2$ e $y = r\cdot s$

Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial r}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial s}$.

Solução:

$$\frac{\partial f}{\partial r} = ?$$



Assim:

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r} \quad ; \text{ onde:}$$

$$f(x,y) = x^2y^2 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2yx^2 \end{cases}$$

$$x = r^2 + s^2 \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial r} = 2r$$

$$y = r\cdot s \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial r} = s$$

Assim, obtemos:

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$= 2xy^2\cdot 2r + 2yx^2\cdot s$$

$$= 2\cdot(r^2+s^2)\cdot(rs)^2\cdot 2r + 2\cdot(rs)\cdot(r^2+s^2)^2\cdot s$$

$$= 4r^3s^2(r^2+s^2) + 2rs^2(r^2+s^2)^2$$

$$= 2s^2(r^2+s^2)\cdot\left[2r^3 + 2r(r^2+s^2)\right]$$

Analogamente para $\dfrac{\partial f}{\partial s}$:

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}\ ; \quad \text{onde:}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2yx^2\ ;$$

$$\frac{\partial x}{\partial s} = 2s \quad \text{e} \quad \frac{\partial y}{\partial s} = r\ ;$$

e disso segue que:

$$\frac{\partial f}{\partial s} = 2xy^2\cdot 2s + 2yx^2\cdot r$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial s} = 4xy^2s + 2yx^2r$$

DERIVADA DIRECIONAL:

Def.: Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função escalar derivável, e seja $\vec{u}$ um vetor unitário, ou seja, tal que $\|\vec{u}\| = 1$. Definimos a derivada de f em um ponto $a \in \text{int}(\Omega)$, na direção do vetor $\vec{u}$, por

$$D_{\vec{u}} f(a) = \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t \cdot \vec{u}) - f(a)}{t}$$

Assim, por exemplo; no caso $\mathbb{R}^2$, tomando

$\vec{u} = \vec{i} = (1, 0)$; $\|\vec{u}\| = \|\vec{i}\| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1.$

Então; para $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}} = \frac{\partial f}{\partial \vec{i}} = \lim_{t \to 0} \frac{f((x,y) + t \cdot \vec{i}) - f(x,y)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f((x,y) + t(1,0)) - f(x,y)}{t}$$

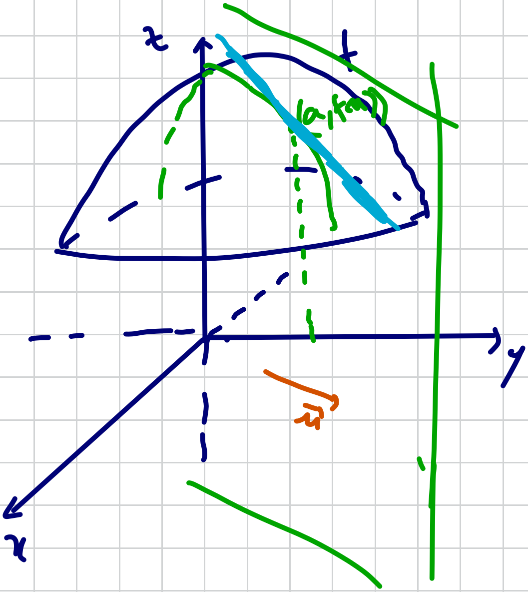
$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(x+t, y) - f(x,y)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

conclusão: $\boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{i}} = \frac{\partial f}{\partial x}.}$

Do mesmo modo se mostra que

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{j}} = \frac{\partial f}{\partial y}}$$

Assim, o significado geométrico de $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a)$, com $\|\vec{u}\| = 1$, corresponde à inclinação da reta tangente ao gráfico de $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, do plano que intercepta o gráfico no ponto a, paralelo ao vetor $\vec{u}$.



Ex.: Seja $f(x,y) = xy^2$.

Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}$, sendo $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Solução: Note que $\|\vec{u}\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1.$$

Assim:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}} = \lim_{t \to 0} \frac{f((x,y) + t\vec{u}) - f(x,y)}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f\left((x,y) + t\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) - f(x,y)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f\left(x + \frac{t}{2}, y + t\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - f(x,y)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\left(x + \frac{t}{2}\right) \cdot \left(y + \frac{t\sqrt{3}}{2}\right)^2 - x y^2}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\left(x + \frac{t}{2}\right) \cdot \left(y^2 + t\sqrt{3} \cdot y + \frac{3t^2}{4}\right) - x y^2}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\cancel{xy^2} + t\sqrt{3}xy + \frac{3t^2}{4}x + \frac{t}{2}y^2 + \frac{t^2\sqrt{3}y}{2} + \frac{3t^3}{4} \cancel{- xy^2}}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\cancel{t}\left(\sqrt{3}xy + \frac{3tx}{4} + \frac{y^2}{2} + \frac{t\sqrt{3}y}{2} + \frac{3t^2}{4}\right)}{\cancel{t}}$$

$\to 0$ $\to 0$ $\to 0$

$$= \sqrt{3}xy + \frac{y^2}{2} \implies \boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{u}} = \sqrt{3}xy + \frac{y^2}{2}}$$