Fundação Universidade Federal de Pelotas
Disciplina de Cálculo 3 - Turmas T2 e T3
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 07 de Exercícios -Integrais múltiplas (primeiros conceitos)

1. Sejam $A \subset \mathbb{R}^m$ um bloco do $\mathbb{R}^m$, $f : A \to \mathbb{R}$ integrável, e sejam
$$m = \inf\{f(x) \,:\, x \in A\} \text{ e } \quad M = \sup\{f(x) \,:\, x \in A\}.$$
Mostre que
$$m \leq \frac{\int_A f(x)dx}{\mathrm{Vol}(A)} \leq M.$$

2. Adicionando a hipótese no exercício anterior de que f é contínua no bloco A, conclua que existe $c \in A$ tal que[1]
$$\int_A f(x)dx = f(c) \cdot \mathrm{Vol}A.$$

3. Encontre um intervalo fechado que contenha o valor da integral dupla dada em cada caso (**Obs.:** use o exercício 2).
   (a) $\int\!\!\int_R (x^2+y^2)dA$, onde R é a região retangular com vértices em $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ e $(0,1)$.
   (b) $\int\!\!\int_R e^{xy}dA$, onde R é a região retangular com vértices em $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ e $(0,1)$.
   (c) $\int_A (x+y)e^{yz}dxdydz$, onde A é o bloco $[1,3]\times[0,2]\times[1,4]$.

4. Sem efetuar cálculo algum, explique por quê a função $f : A = [0,100]\times[0,100] \to \mathbb{R}$ dada por
$$f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2, \text{ se } (x,y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \\ 0, \ \ \text{caso contrário} \end{cases}$$
é integrável no bloco A. E qual seria o valor? Se substituirmos o bloco A por todo o $\mathbb{R}^2$, as conclusẽs acima mudariam? Justifique.

5. Usando uma partição regular, através da definição de integral múltipla, mostre que, sendo A um retângulo do $\mathbb{R}^2$, com lados paralelos aos eixos coordenados, então
$$\int_A 1\, dxdy = \text{área do retângulo}.$$

6. Usando a definção de integral dupla como limite de somas de Riemann, calcule a integral $\int_A f(x,y)dxdy$, sendo:
   (a) $f(x,y) = x+4y$, e A o bloco $[0,2]\times[0,1]$. (Resp.: 6)
   (b) $f(x,y) = 3x^2+2y$, e A o bloco $[0,2]\times[0,1]$. (Resp.: 10)
   (c) $f(x,y) = x^2+3y$, e A o bloco $[0,2]\times[1,5]$.

7. Seja $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (x-\frac{1}{2})^2 + (y-\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}\}$. Explique por quê
$$\int_X (x+y)dxdy \geq \int_X x^2+y^2dxdy.$$

[1] usar o Teorema do valor intermediário