

Universidade Federal de Pelotas
Disciplina de Cálculo 3 - Turmas T2 e T3
Lista 6 de Exercícios - Propriedades do gradiente. Planos tangentes.
Extremos relativos e absolutos
Prof. Dr. Maurício Zahn

1. Prove o seguinte teorema:

Teorema. *Sejam f, g funções de $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciáveis e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então*

(i) $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$;

(ii) $\nabla(\alpha f) = \alpha \nabla f$;

(iii) $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$.

2. Seja $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$, e $r = \|\vec{r}\|$.

(a) Mostre que $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$ e $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$. Conclua que $\nabla r = \frac{\vec{r}}{r}$.

(b) Mostre que $\nabla \ln r = \frac{\vec{r}}{r^2}$.

3. Encontre o plano tangente ao gráfico de $f(x, y) = xy^3 + x^2$ no ponto $P(2, -2)$.

4. Obtenha a equação do plano tangente ao gráfico de cada superfície a seguir, nos pontos indicados:

(a) $x^2 + y^2 + z^2 = 49$, no ponto $P(6, 2, 3)$ [Resp.: $6x + 2y + 3z - 49 = 0$]

(b) $f(x, y) = 3xy^3 + x^3$ em $P(2, 1)$.

(c) $f(x, y) = e^{x \cos y}$ em $P(-1, \frac{\pi}{2})$. [Resp.: $y + z = 1 + \frac{\pi}{2}$]

5. Encontre os pontos críticos das funções abaixo:

(a) $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 4y + 6x$

(b) $f(x, y) = x^2 + 4xy - y^2 - 8x - 6y$ [Resp.: $(2, 1)$.]

6. Encontre o máximo de $f(x, y) = 2x + y - 3xy$ no quadrado unitário $Q = [0, 1] \times [0, 1]$.
[Resp.: O máx. acontece na fronteira de Q e o valor é $f(1, 0) = 2$.]

7. Classifique os extremos relativos das seguintes funções:

(a) $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$ na região $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 2)^2 + y^2 \leq 1\}$.

[Resp.: máx $(1, 0)$ e mín $(3, 0)$]

(b) $f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{2\sqrt{2}}{3}$ na elipse $x^2 + 2y^2 \leq 1$.

[Resp.: máx $(\pm \frac{2}{\sqrt{5}}, \pm \frac{1}{\sqrt{10}})$, min $(0, 0)$].

8. Das funções de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ abaixo, classifique os extremos relativos, caso existam:

(a) $f(x, y) = x \ln(x + y)$.

(b) $f(x, y) = (x + 3y)e^{y-x^2}$.

(c) $f(x, y) = xye^{-x^2-y^2}$.

(d) $f(x, y) = x^3 + y^4 - 6x - 2y^2$.

(e) $f(x, y) = e^x \sin y$.