GABARITO PROVA 01 – TURMA T3

01)

$$X = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : d_2((x,y,z);(1,1,0)) \geq 4 \}$$

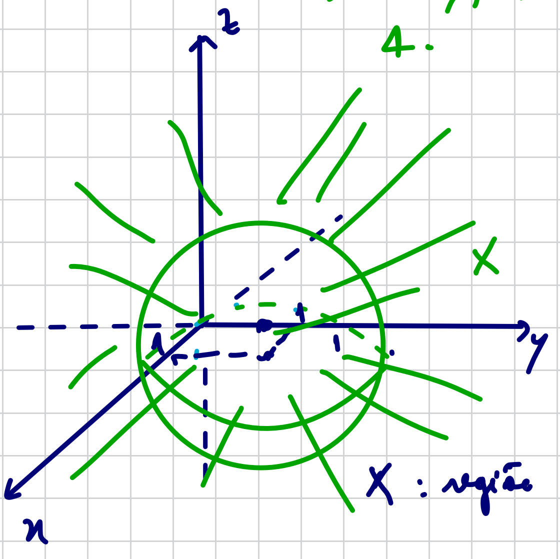
São pontos $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tais que

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-0)^2} \geq 4$$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 \geq 16$$

região interna à esfera centrada em $(1,1,0)$ e raio 4.

1,0



X : região fora da esfera.

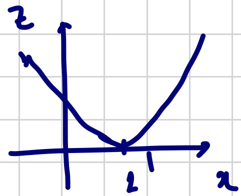
X não é compacto pois não é limitado.

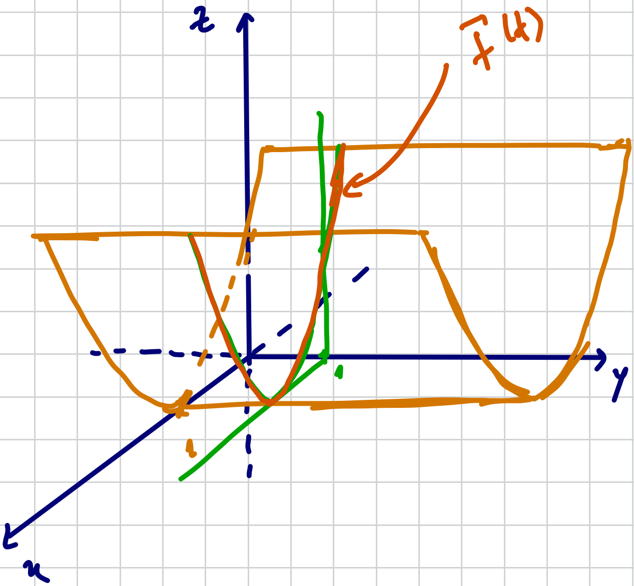
02)

(a) $\vec{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$; $\vec{f}(t) = (t-1, t^2, 1)$

$$\begin{cases} x = t+1 \\ \boxed{y = 1} \\ z = t^2 \end{cases} \longrightarrow t = x-1$$

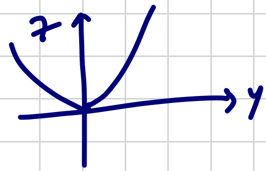
$z = (x-1)^2$

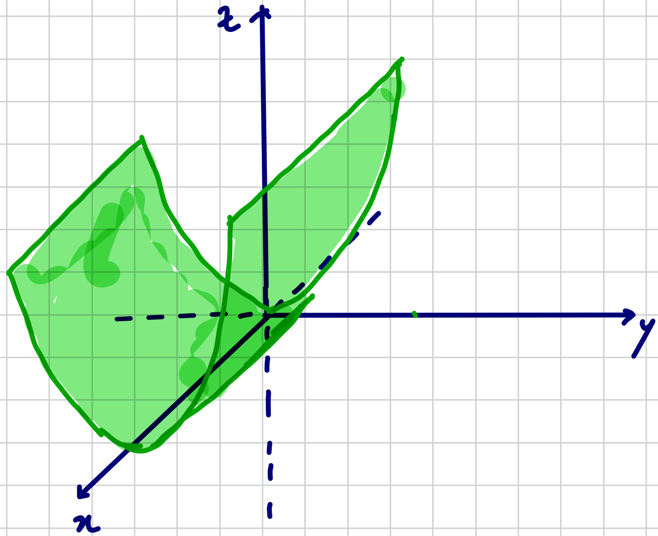




1,0

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $f(x,y) = y^2 \longrightarrow z = y^2$





1,0

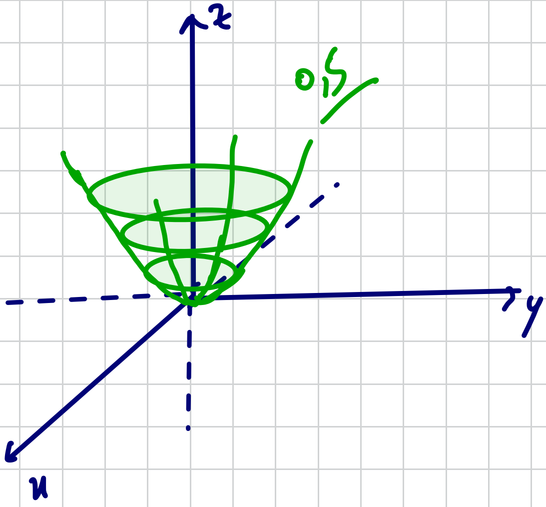
03) $f(x,y) = 4x^2 + y^2$

(a) $4x^2 + y^2 \geq 0 \Rightarrow Im(f) = [0, +\infty)$

$D(f) = \mathbb{R}^2$.

$z = 4x^2 + y^2$ 0,5

- $z = 0$: $z = 4x^2 + y^2 = 0 \iff (x,y) = (0,0)$
- $z = K$; $K > 0$ $z = 4x^2 + y^2 = K$ (elipses).



1,0

(b) Basta notar que, a partir de $\vec{g}$, tem-se:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = 2\,\text{sen}\, t \\ z = \cancel{2}\ 4 \end{cases}$$

→ tem que assumir.

Assim, sendo $z = 4x^2 + y^2$, então:

$$4 = 4\cdot\cos^2 t + (2\,\text{sen}\,t)^2$$

$$4 = 4\cdot\cos^2 t + 4\,\text{sen}^2 t$$

$$4 = 4\cdot(1) \quad \underline{\underline{\text{ok!}}}$$

0,5 PARA TODOS

como há um erro no enunciado, pontuar 0,5 para todos que tentaram fazer certo.

(c) $\vec{g}(t) = (\cos t, 2 \cdot \operatorname{sen} t, 1)$

$\vec{g}'(t) = (-\operatorname{sen} t, 2\cos t, 0)$ 0,2

$P = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}, 1\right)$. $\left.\begin{array}{l}\cos t = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2\operatorname{sen} t = \sqrt{2}\end{array}\right\} t = \frac{\pi}{4}$.

0,3

$\vec{g}'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(-\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}, 2\cos\frac{\pi}{4}, 0\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}, 0\right)$

$\|\vec{g}'(t)\| = \sqrt{\frac{2}{4} + 2 + 0} = \sqrt{\frac{1}{2} + 2} = \sqrt{\frac{5}{2}}$ 0,2

$\Rightarrow \vec{u}_1 = \frac{1}{\|\vec{g}'(\frac{\pi}{4})\|} \cdot \vec{g}'\left(\frac{\pi}{4}\right)$

0,3

$= \left(\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{\cancel{2}}}, \frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}}, 0\right) = \left(-\sqrt{\frac{2}{5}}, 2\sqrt{\frac{2}{5}}, 0\right)$

1,0

04) $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $f(x,y) = e^{\sqrt{x-y}} - 2 . \ln(1-xy)$

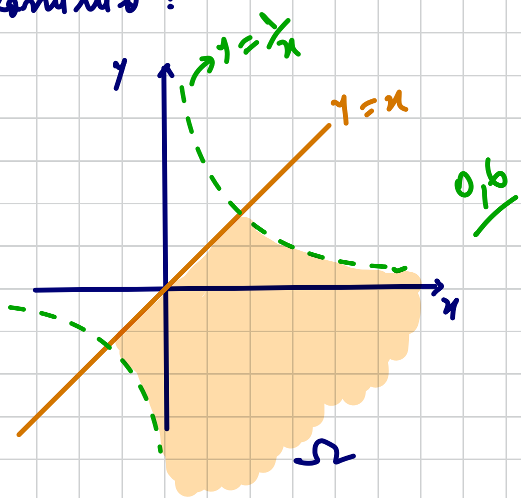
(a) condições de existência :

- $x - y \geq 0 \Leftrightarrow -y \geq -x \Leftrightarrow y \leq x$
- $1 - xy > 0 \Leftrightarrow xy > -1 \Leftrightarrow xy < 1$. 0,3

"$y = \frac{1}{x}$"

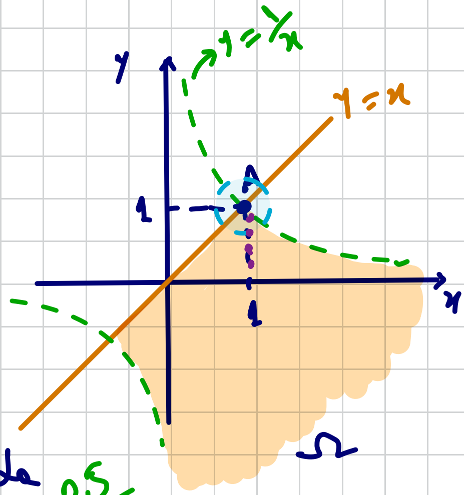
$D(f) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x$ e $x . y < 1 \}$. 0,1

gráfico do domínio :



1,0

(b)



O ponto $A(1,1)$ não é um ponto interior ao conj. Ω pois qualquer bola centrada em A não fica inteiramente contida em Ω.

0,5

1,0

No entanto $A(1,1)$ pertence ao fecho de Ω, pois podemos encontrar uma seq. de pontos $(x_n) \subset \Omega$ que converge para A.

0,5

(c) Ω não é aberto pois a origem $O(0,0)$ pertence a Ω, já que, pelas condições de existência, temos:

- $0 - 0 \geq 0$
- $1 - 0 \cdot 0 > 0$

0,2

Mas nenhuma bola centrada na origem fica contida em Ω; ou seja, a origem pertence a Ω, mas não é interior a Ω. Portanto, Ω não é aberto.

Ω também não é fechado do $\mathbb{R}^2$ pois o ponto $A(1,1)$ é tal que $A \notin \Omega$, mas podemos obter seq. de Ω convergindo para A. Logo, está em $\overline{\Omega}$.

0,5

0,2

Ω não é compacto pois não é limitado e não é fechado.

0,1

(d) $f(x,y) = e^{(x-y)^{1/2}} - 2 . \ln(1-xy)$

• $\frac{\partial f}{\partial x} = e^{(x-y)^{1/2}} \cdot \frac{1}{2}(x-y)^{-1/2} \cdot (1) - 2 \cdot \frac{-y}{1-xy}$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{e^{\sqrt{x-y}}}{2\sqrt{x-y}} + \frac{2y}{1-xy}$$

0,5

• $\frac{\partial f}{\partial y} = e^{\sqrt{x-y}} \cdot \frac{1}{2}(x-y)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-1) - 2 \cdot \frac{(-x)}{1-xy}$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{e^{\sqrt{x-y}}}{2\sqrt{x-y}} + \frac{2x}{1-xy}$$

0,5

1,0

05)

(a) • $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{f(0+h,0) - f(0,0)}^{=0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-0}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2h^3-3.0}{h^2+0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\cancel{h^3}}{\cancel{h^3}} = 2$

0,5

$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 2}$

• $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-0}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0-0}{0^2+h^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$

0,5

$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0}$

1,0

(b) Note que, $\forall\ (x,y) \neq (0,0)$, tem-se:

$$0 \leq |f(x,y)| = \left| \frac{2x^3 - 3x^2 y}{x^2+y^2} \right| = \left| \frac{x^2(2x-3y)}{x^2+y^2} \right| =$$

$$= \frac{x^2\,|2x-3y|}{x^2+y^2} \leq \frac{\cancel{(x^2+y^2)}\,|2x-3y|}{\cancel{x^2+y^2}} = |2x-3y|$$

$x^2 \leq x^2+y^2$

0,5

Ou seja:

$$0 \leq |f(x,y)| \leq \underbrace{|2x-3y|}_{\substack{\to 0 \\ (x,y)\to(0,0)}}$$

$0 \quad (x,y)\to(0,0)$

$\Downarrow$ T. do Sanduíche

0,5

$$|f(x,y)| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

1,0

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

Logo, f é contínua na origem.

06)

- $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \dfrac{0}{\sqrt{x^4}} = 0$ 0,4

- $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \dfrac{x\cdot x}{\sqrt{x^4+x^4}} = \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \dfrac{x^2}{\sqrt{2x^4}} =$

$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \dfrac{\cancel{x^2}}{\sqrt{2}\cancel{x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}.$ 0,4

0,2

Como por caminhos diferentes resultou em limites diferentes, segue que $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

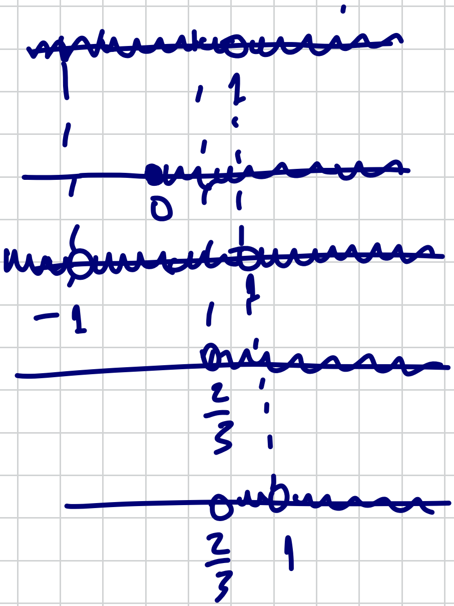
1,0

---

07) (a) condições de existência:

- $3t-3\neq 0 \Leftrightarrow t\neq 1.$ 1
- $t\geq 0$ 0
- $t^2-1\neq 0 \Leftrightarrow t\neq \pm 1$ −1 1
- $3t-2>0 \Leftrightarrow t>\frac{2}{3}$ 2/3

Tomando a intersecção de todas as condições de existência acima:



~~0,2~~

0,5

$$D(\vec{f}) = \left(\frac{2}{3}, 1\right) \cup (1, +\infty)$$

(b) • $\displaystyle\lim_{t\to 1} f_2(t) = \lim_{t\to 1} \frac{t^2 - t}{3t-3} = \lim_{t\to 1} \frac{t\cancel{(t-1)}}{3\cancel{(t-1)}}$

$$= \lim_{t\to 1} \frac{t}{3} = \frac{1}{3}$$

• $\displaystyle\lim_{t\to 1} \frac{\sqrt{t}-1}{t^2-1} \cdot \frac{\sqrt{t}+1}{\sqrt{t}+1} = \lim_{t\to 1} \frac{\cancel{t-1}}{(t+1)\cancel{(t-1)}(\sqrt{t}+1)}$

$$= \frac{1}{(1+1)(\sqrt{1}+1)} = \frac{1}{4}$$

$\bullet \lim_{t\to 1} f_3(t) = \lim_{t\to 1} \ln(3t-2) = \ln(3(1)-2)$

$= \ln 1 = 0$

Disso, obtemos:

$\lim_{t\to 1} \vec{f}(t) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 0\right).$

1,0

08)

$\bullet \ \frac{\partial f}{\partial x} = -\operatorname{sen}(x^2y - y^2z).(2xy) + 0$

0,5

$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = -2xy.\operatorname{sen}(x^2y - y^2z)}$

$\bullet \ \frac{\partial f}{\partial y} = -\operatorname{sen}(x^2y - y^2z).(x^2 - 2yz) + 0$

0,5

$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial y} = -(x^2 - 2yz).\operatorname{sen}(x^2y - y^2z)}$

$$\bullet\ \frac{\partial f}{\partial z} = -\operatorname{sen}(x^2y - y^2z)\cdot(-y^2) + 2z$$

0,5

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial z} = 2z + y^2\cdot \operatorname{sen}(x^2y - y^2z)}$$

1,5