GABARITO PROVA 01 – TURMA T2

01)

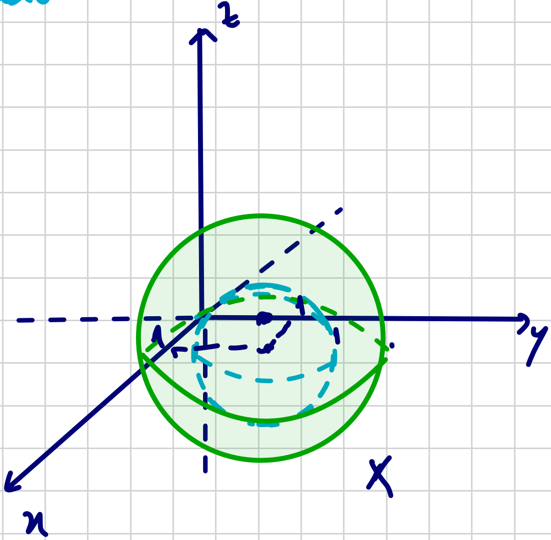
$$X = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad 1 < d_2((x,y,z);(1,1,0)) \leq 4 \}$$

São pontos $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tais que

$$1 < \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-0)^2} \leq 4$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{1 \leq (x-1)^2 + (y-1)^2}_{\text{região externa à esfera centrada em } (1,1,0) \text{ e raio } 1} \overbrace{+ z^2 \leq 16}^{\text{região interna à esfera centrada em } (1,1,0) \text{ e raio } 4.}$$

1,0

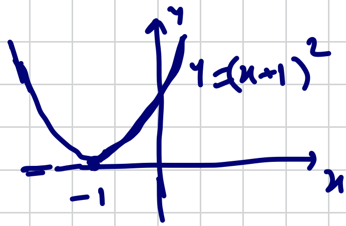


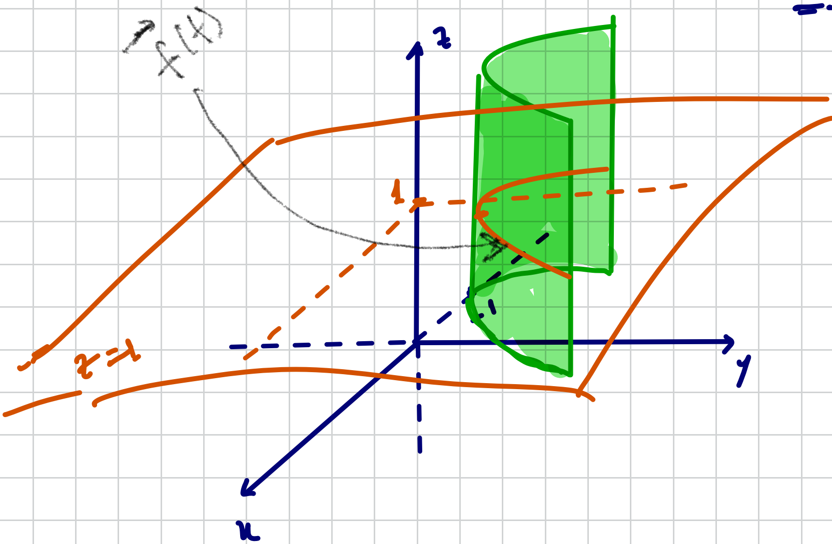
X não é compacto, pois, embora limitado, não é fechado.

02)

(a) $\vec{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$; $\vec{f}(t) = (t-1, t^2, 1)$

$$\begin{cases} x = t - 1 \to t = x + 1 \\ y = t^2 \longrightarrow y = (x+1)^2 \\ z = 1 \end{cases}$$

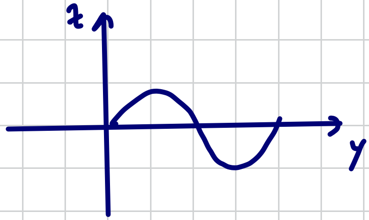


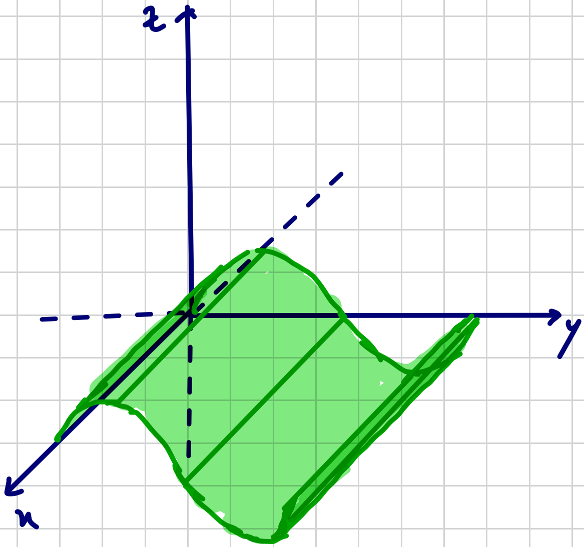


1,0

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $f(x,y) = \operatorname{sen} y$

$z = \operatorname{sen} y$





1,0

03) $f(x,y) = 4x^2 + y^2$

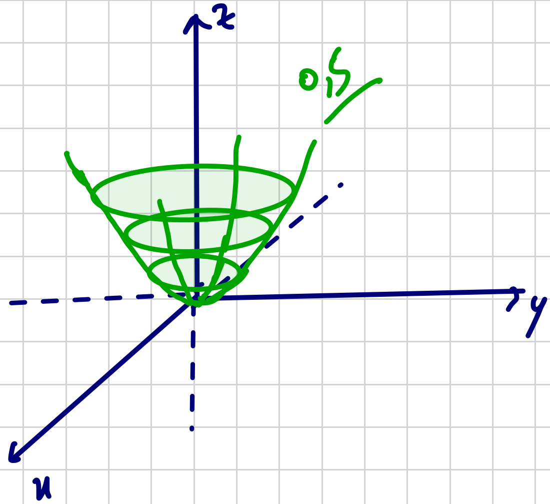
(a) $4x^2 + y^2 \geq 0 \Rightarrow \operatorname{Im}(f) = [0, +\infty)$

$D(f) = \mathbb{R}^2$.

$z = 4x^2 + y^2$

0,5

- $z = 0$: $z = 4x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$
- $z = K$; $K > 0$ $z = 4x^2 + y^2 = K$ (elipses).



1,0

(b) Basta notar que; a partir de $\vec{g}$, tem-se:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = 2\,\text{sen}\,t \\ z = \cancel{2}\,4 \end{cases}$$

→ tem que assumir.

Assim, sendo $z = 4x^2 + y^2$, então:

$$4 = 4\cdot\cos^2 t + (2\,\text{sen}\,t)^2$$

$$4 = 4\cdot\cos^2 t + 4\,\text{sen}^2 t$$

$$4 = 4\cdot(1)$$ ok!

0,5

PARA TODOS

como há um erro no enunciado, pontuar 0,5 para todos que tentarem fazer certo.

(c) $\vec{g}(t) = (\cos t, 2\cdot \operatorname{sen} t, 1)$

$\vec{g}'(t) = (-\operatorname{sen} t, 2\cos t, 0)$ 0,2

$P = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}, 1\right)$. $\left.\begin{array}{l}\cos t = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2\operatorname{sen} t = \sqrt{2}\end{array}\right\} t = \frac{\pi}{4}$.

0,3

$\vec{g}'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(-\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}, 2\cos\frac{\pi}{4}, 0\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}, 0\right)$

$\|\vec{g}'(t)\| = \sqrt{\frac{2}{4} + 2 + 0} = \sqrt{\frac{1}{2} + 2} = \sqrt{\frac{5}{2}}$ 0,2

$\Rightarrow \vec{u}_1 = \frac{1}{\|\vec{g}'(\frac{\pi}{4})\|} \cdot \vec{g}'\left(\frac{\pi}{4}\right)$

0,3

$= \left(\frac{-\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}}{\frac{\sqrt{5}}{\cancel{2}}}, \frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}}, 0\right) = \left(-\sqrt{\frac{2}{5}}, 2\sqrt{\frac{2}{5}}, 0\right)$

1,0

04) $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $f(x,y) = \sqrt{x-y} + \ln(1-xy)$

(a) condições de existência :

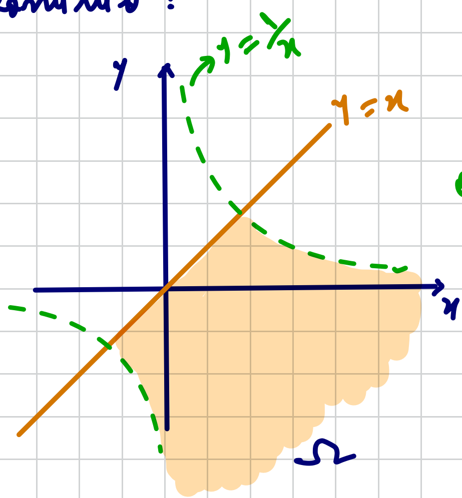
- $x - y \geq 0 \Leftrightarrow -y \geq -x \Leftrightarrow y \leq x$
- $1 - xy > 0 \Leftrightarrow xy > -1 \Leftrightarrow xy < 1.$

0,3

" $y = \frac{1}{x}$ "

$D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x \text{ e } x \cdot y < 1\}.$ 0,1

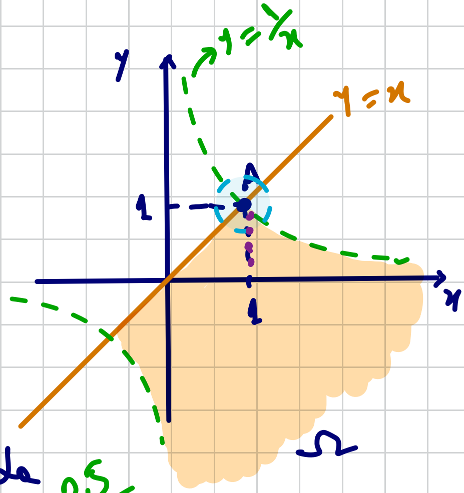
gráfico do domínio :



0,6

1,0

(b)



O ponto $A(1,1)$ não é um ponto interior ao conj. Ω pois qualquer bola centrada em A não fica inteiramente contida em Ω.

0,5

1,0

No entanto $A(1,1)$ pertence ao fecho de Ω, pois podemos encontrar uma seq. de pontos $(x_n) \subset \Omega$ que converge para A.

0,5

(c) Ω não é aberto pois a origem $O(0,0)$ pertence a Ω, já que, pelas condições de existência, temos:

- $0 - 0 \geq 0$
- $1 - 0 \cdot 0 > 0$

0,2

Mas nenhuma bola centrada na origem fica contida em Ω; ou seja, a origem pertence a Ω, mas não é interior a Ω. Portanto, Ω não é aberto.

Ω também não é fechado do $\mathbb{R}^2$ pois o ponto $A(1,1)$ é tal que $A \notin \Omega$, mas podemos obter seq. de Ω convergindo para A. Logo, está em $\overline{\Omega}$.

0,5

0,2

Ω não é compacto pois não é limitado e não é fechado.

0,1

(d) $f(x,y) = (x-y)^{\frac{1}{2}} + \ln(1-xy)$

• $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{2}(x-y)^{-\frac{1}{2}} \cdot 1 + \dfrac{-y}{1-xy}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x-y}} - \frac{y}{1-xy}}$$

0,5

• $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{2}(x-y)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-1) + \dfrac{-x}{1-xy}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{2\sqrt{x-y}} - \frac{x}{1-xy}}$$

0,5

1,0

05)

(a) • $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{f(0+h,0) - f(0,0)}^{=0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-0}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2h^3 - 3.0}{h^2+0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\cancel{h^3}}{\cancel{h^3}} = 2$

0,5 ✓

$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 2}$

• $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-0}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0-0}{0^2+h^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$

0,5 ✓

$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0}$

1,0

(b) Note que, $\forall\ (x,y) \neq (0,0)$, tem-se:

$$0 \leq |f(x,y)| = \left| \frac{2x^3 - 3x^2y}{x^2+y^2} \right| = \left| \frac{x^2(2x-3y)}{x^2+y^2} \right| =$$

$$= \frac{x^2\,|2x-3y|}{x^2+y^2} \leq \frac{(\cancel{x^2+y^2})\,|2x-3y|}{\cancel{x^2+y^2}} = |2x-3y|$$

0,5

$x^2 \leq x^2+y^2$

Ou seja:

$$0 \leq |f(x,y)| \leq |2x-3y|$$

0 $(x,y)\to(0,0)$

$\to 0$ $(x,y)\to(0,0)$

$\Downarrow$ T. do Sanduíche

0,5

$$|f(x,y)| \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

1,0

Logo, f é contínua na origem.

06)

- $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \frac{0}{\sqrt{x^4}} = 0$ 0,4

- $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \frac{x\cdot x}{\sqrt{x^4+x^4}} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \frac{x^2}{\sqrt{2x^4}} =$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \frac{\cancel{x^2}}{\sqrt{2}\,\cancel{x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

0,4

0,2

Como por caminhos diferentes resultou em limites diferentes, segue que $\nexists \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

1,0

---

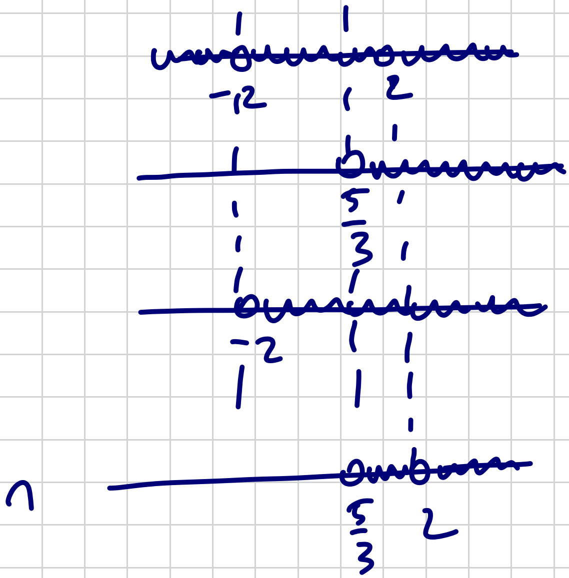
07) (a) condições de existência:

- $t^2-4\neq 0 \Leftrightarrow t\neq\pm 2$ $\quad -2 \quad 2$ 0,1

- $3t-5>0 \Leftrightarrow t>\frac{5}{3}$ $\quad \frac{5}{3}$ 0,1

- $t+2>0$ e $t+2\neq 0. \Rightarrow t>-2$ $\quad -2$ 0,1

Tomando a interseção de todas as condições de existência acima:



0,2

0,5

$D(f) = \left(\frac{5}{3}, 2\right) \cup (2, +\infty)$

(b) • $\lim_{t \to 2} f_2(t) = \lim_{t \to 2} \frac{t^2 - 3t + 2}{t^2 - 4} = \lim_{t \to 2} \frac{\cancel{(t-2)}(t-1)}{(t+2)\cancel{(t-2)}}$

$$
\begin{array}{r|l}
t^2 - 3t + 2 & t - 2 \\
\cline{2-2}
-t^2 + 2t & t - 1 \\
\cline{1-1}
-t + 2 & \\
+t - 2 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

0,3

$= \lim_{t \to 2} \frac{t-1}{t+2} =$

$= \frac{2-1}{2+2} = \frac{1}{4}$

$\bullet \lim_{t\to 2} f_2(t) = \lim_{t\to 2} \ln(3t-5) = \ln(6-5) =$

$= \ln 1 = 0$ // 0,2

$\bullet \lim_{t\to 2} f_3(t) = \lim_{t\to 2} \dfrac{\sqrt{t+2}-2}{t-2} \cdot \dfrac{\sqrt{t+2}+2}{\sqrt{t+2}+2} =$

$= \lim_{t\to 2} \dfrac{t+2-4}{(t-2)(\sqrt{t+2}+2)} =$ 0,3

$= \lim_{t\to 2} \dfrac{\cancel{t-2}}{\cancel{(t-2)}(\sqrt{t+2}+2)} = \dfrac{1}{\sqrt{2+2}+2} = \dfrac{1}{4}$ //

Então:

$\lim_{t\to 2} \vec{f}(t) = \left(\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}\right)$ 0,2

1,0

08) $f(x,y,z) = e^{3x-2y} + \cos(x^2z^3)$

$\bullet\ \frac{\partial f}{\partial x} = e^{3x-2y} \cdot 3 - \operatorname{sen}(x^2z^3) \cdot 2xz^3$ 0,5

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = 3 \cdot e^{3x-2y} - 2xz^3 \cdot \operatorname{sen}(x^2z^3)}$$

$\bullet\ \frac{\partial f}{\partial y} = e^{3x-2y} \cdot (-2) + 0$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial y} = -2 \cdot e^{3x-2y}}$$ 0,5

$\bullet\ \frac{\partial f}{\partial z} = 0 - \operatorname{sen}(x^2z^3) \cdot 3x^2z^2$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial z} = -3x^2z^2 \cdot \operatorname{sen}(x^2z^3)}$$ 0,5

1,5