CÁLCULO 3, TURMA T2

17/04/26 - AULA 11

AULA DE EXERCÍCIOS!

LISTA 03:

1. Use a definição de limite para provar que:
(a) $\lim_{(x,y)\to(1,2)} (2x - 4y) = -6$ (b) $\lim_{(x,y)\to(1,1)} (x^2 + y^2) = 2.$

(b) $\lim_{(x,y)\to(1,1)} (x^2+y^2) = 2.$

Dado $\varepsilon > 0$, precisamos encontrar $\delta > 0$ (dependendo do $\varepsilon > 0$), tal que, $\forall (x,y) \in D(f)$:

$$0 < d_2((x,y),(1,1)) < \delta,$$

$$0 < \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} < \delta$$

implique em $|f(x,y) - 2| < \varepsilon$.

Avaliando $|f(x,y)-2|$, temos:

$$|f(x,y) - 2| = |x^2 + y^2 - 2|$$

precisamos fazer aparecer $x-1$ e $y-1$.

Note que: $(x-1)^2 = x^2 \underline{-2x+1}$

$(y-1)^2 = y^2 \underline{-2y+1}$

Assim:

$$|f(x,y)-2| = |x^2+y^2-2| =$$

$$= |\underbrace{x^2-2x+1}+2x-1+\underbrace{y^2-2y+1}+2y-1-2|$$

$$= |(x-1)^2+2x-1+(y-1)^2+2y-1-2|$$

$$= |(x-1)^2+(y-1)^2+2x+2y-4|$$

$$= |(x-1)^2+(y-1)^2+2x-2+2y-2|$$

$$= |(x-1)^2+(y-1)^2+2(x-1)+2.(y-1)| \leq$$

$$\leq |(x-1)^2+(y-1)^2|+2.|x-1|+2.|y-1|.$$

Note que:

- $0 < \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} < \delta \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2 < \delta^2$
- $|x-1| = \sqrt{(x-1)^2} \leq \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} < \delta.$

- $|y-1| = \sqrt{(y-1)^2} \leq \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} < \delta.$

Então:

$$|f(x,y)-2| \leq \underbrace{|(x-1)^2+(y-1)^2|}_{\leq \delta^2} + 2\underbrace{|x-1|}_{<\delta} + 2\cdot\underbrace{|y-1|}_{<\delta}$$

$$< \delta^2 + 2\delta + 2\delta < \delta^2 + 4\delta$$

$$= \delta^2 + 4\delta + 4 - 4 = (\delta+2)^2 - 4 := \varepsilon$$

$$\Rightarrow (\delta+2)^2 = \varepsilon + 4$$

$$\delta + 2 = \sqrt{\varepsilon+4}$$

$$\delta = \sqrt{\varepsilon+4} - 2 > 0$$

Basta tomar $\delta = \sqrt{\varepsilon+4} - 2 > 0.$

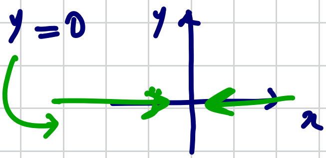
L3:

2. Em cada exercício a seguir, mostre que não existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

(a) $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ (b) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ (c) $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}$

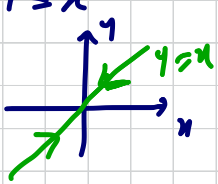
(c) Precisamos verificar caminhos que passem pela origem (0,0). Assim:

- $$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \frac{x^2y^2}{x^4+y^4} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \frac{x^2\cdot 0}{x^4+0}$$



$$= \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} 0 = 0$$

- $$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \frac{x^2y^2}{x^4+y^4} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \frac{x^2\cdot x^2}{x^4+x^4} =$$



$$= \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \frac{\cancel{x^4}}{2\cdot\cancel{x^4}} = \frac{1}{2}$$

Como por caminhos diferentes resultou em limites diferentes, segue que $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

DE UMA PROVA ANTIGA:

☐ **Questão 02.** Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função dada por $f(x, y) = \sqrt{x + y} + \ln(1 - xy)$.

(a) [Peso 1] Obtenha o domínio Ω e faça um esboço da região do domínio.

(b) [Peso 0,5] O domínio Ω é um conjunto aberto, fechado, ou nem aberto e nem fechado do $\mathbb{R}^2$? Justifique. Conclua se Ω é um compacto do $\mathbb{R}^2$, justificando.

(c) [Peso 1] A origem $(0, 0)$ é um ponto interior de Ω? É um ponto aderente a Ω? Justifique suas respostas.

(d) [Peso 0,5] Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

$$f(x,y) = \sqrt{x+y} + \ln(1-xy)$$

(a) $D(f)$ e gráfico do domínio:

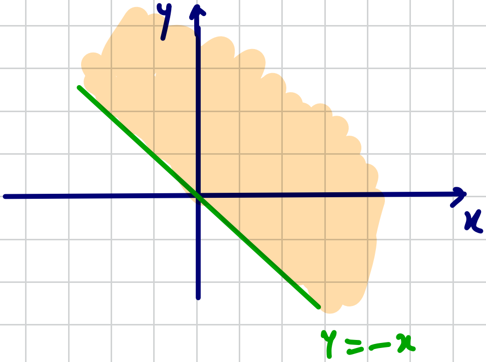
condições de existência:

- $x+y \geq 0 \rightsquigarrow y \geq -x$
- $1-xy > 0 \rightsquigarrow -xy > -1 \quad \times(-1)$

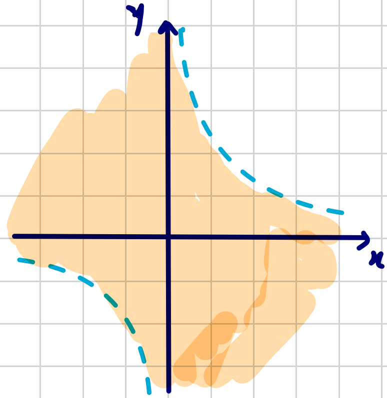
$$xy < 1. \Rightarrow y < \frac{1}{x}.$$

$$D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq -x \text{ e } xy < 1\}.$$

Só PARA DESENHO



$(y \geq -x)$

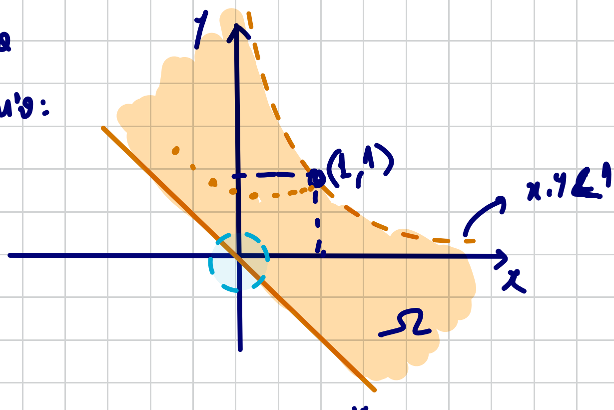


$(x \cdot y < 1)$

" $\cap$ "

$\Downarrow$

Gráfico do domínio:



(b) O domínio Ω não é aberto, pois, por exemplo, $(0,0) \in \Omega$, mas não é interior a Ω, pois, $\forall \delta > 0$, $B_\delta(0,0) \not\subset \Omega$.

Ω também não é fechado, pois, por exemplo

$(1,1) \notin \Omega$ (pois $1 \cdot 1 < 1$ é falso), mas
$x \cdot y < 1$
é um ponto aderente a Ω, ou seja, temos um ponto fora de Ω pertencente ao fecho de Ω.

- Ω não é compacto, pois não é fechado (e nem limitado)

(c) $(0,0)$ não é interior a Ω pois nenhuma bola centrada na origem estará contida em Ω (reveja o item b)

Mas $(0,0)$ é aderente a Ω, pois conseguimos obter seq. $(x_n) \subset \Omega$ tal que
$(x_n) \to (0,0)$.

(d) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = ?$

$$f(x,y) = \sqrt{x+y} + \ln(1-xy)$$
$$= (x+y)^{1/2} + \underline{\ln(1-xy)}$$

$(\ln r)' = \dfrac{r'}{r}$

$(r^k)' = k \cdot r^{k-1} \cdot r'$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2}\cdot(x+y)^{\frac{1}{2}-1}\cdot(1+0) + \frac{-y}{1-xy}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x+y}} - \frac{y}{1-xy}.$$

PROVA ANTIGA:

☐ **Questão 03.** [Peso 2] Seja a função vetorial $\vec{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ dada por $\vec{f}(t) = (2\,\text{sen}\,t,\ 2t,\ 2\cos t)$. Obtenha um vetor tangente unitário ao gráfico de $\vec{f}$ no ponto $P(2,\pi,0)$. Obtenha também a equação da reta tangente ao gráfico de $\vec{f}$ no mesmo ponto P dado.

$\vec{f}(t) = (2\,\text{sen}\,t,\ 2t,\ 2\cos t).$

$P(2,\pi,0)$. Achar o vetor tangente unitário em P.

$\vec{f}'(t) = (2\cos t,\ 2,\ -2\,\text{sen}\,t)$

Temos de $\vec{f}$ que:

$$\begin{cases} x = 2\,\text{sen}\,t = 2 \Rightarrow \text{sen}\,t = 1 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2} \\ y = 2t = \pi \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2} \\ z = 2\cos t = 0 \Leftrightarrow \cos t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

O vetor tangente no ponto P é dado por

$$\vec{f}'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \Big(2\cdot\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0},\ 2,\ -2\cdot\underbrace{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}}_{1}\Big) = \underline{\underline{(0,2,-2)}}$$

VETOR TANGENTE

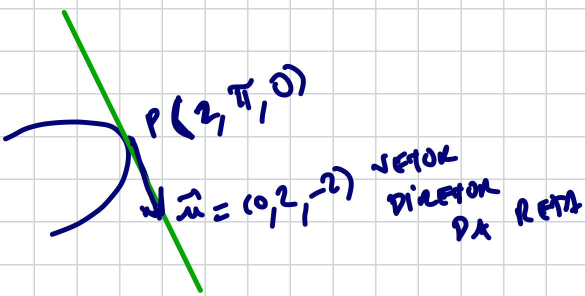
$$\left\|\vec{f}'\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\| = \sqrt{(0)^2+(2)^2+(-2)^2}$$

$$= \sqrt{0+4+4} = 2\sqrt{2} \;/\!/$$

Assim, o vetor tangente unitário será dado por

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\left\|\vec{f}'\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\|}\cdot \vec{f}'\left(\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot(0,2,-2) = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$



A eq. da reta será:

(a,b,c): VETOR DIRETOR.

$$(r): \begin{cases} x = x_p + at \\ y = y_p + bt \\ z = z_p + ct \end{cases}$$

$$(r): \begin{cases} x = 2 + 0.t \\ y = \pi + 2t \\ z = 0 - 2t \end{cases} = \begin{cases} x = 2 \\ y = \pi + 2t. \\ z = -2t \end{cases}$$

□ **Questão 05.** [Peso 1] Verifique se a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{5x^2y}{x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$ é contínua na origem.

Precisamos verificar se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

(i) $f(0,0) = 0$.

(ii) $\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = ?$

De fato, note que:

$$0 \leq |f(x,y)| = \left| \frac{5x^2y}{x^2+y^2} \right| = \frac{5\,x^2 . |y|}{x^2+y^2} \leq$$

$$x^2 \leq x^2 + y^2$$

$$\leq \frac{5\cancel{(x^2+y^2)}\,|y|}{\cancel{x^2+y^2}} = 5|y|$$

Então:

$$0 \le \underbrace{0}_{\substack{\downarrow \\ 0 \\ (x,y)\to(0,0)}} \le |f(x,y)| \le \underbrace{5\cdot|y|}_{\substack{\downarrow \\ 0 \\ (x,y)\to(0,0)}}$$

$\Downarrow$ T. Sanduíche

$$|f(x,y)| \to 0 \implies \underset{(x,y)\to(0,0)}{f(x,y) \to 0}$$

Conclusão:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0);$$

Ou seja, f é contínua na origem.