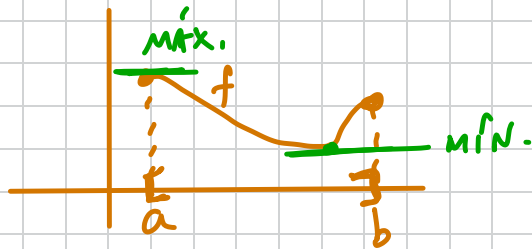


TEOREMA DE WEIERSTRASS: Toda função escalar,
 $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, com Ω um compacto do \mathbb{R}^m ,
assume valores máximo e mínimo em Ω .

A demonstração desse resultado requer Análise Real.

A versão a uma variável real (no cálculo) é a seguinte: toda $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua assume valores máximo e mínimo em $[a, b]$.



DERIVADAS:

Nesta seção iniciamos o estudo de derivadas para funções $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$.

O primeiro caso a considerar será para funções reais de $(a, b) \rightarrow \mathbb{R}^m$

Def: Seja $\vec{f}: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^m$. Definimos a derivada de \vec{f} em um ponto $t_0 \in (a, b)$

o limite:

$$\vec{f}'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\vec{f}(t) - \vec{f}(t_0)}{t - t_0}$$

Tendo $t - t_0 = h \in \mathbb{R}$, podemos escrever:

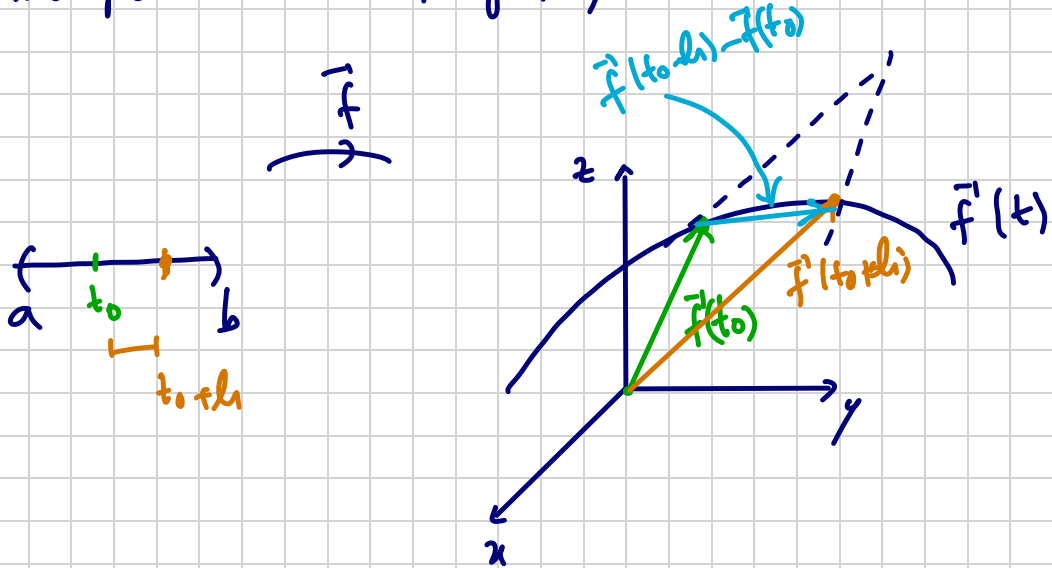
$$t = t_0 + h \text{ e } \lim_{t \rightarrow t_0} h \rightarrow 0$$

$$\vec{f}'(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{f}(t_0 + h) - \vec{f}(t_0)}{h}$$

Lembrando do cálculo 1, a derivada em um ponto t_0 representa, geometricamente, a inclinação da reta tangente ao gráfico de f

no ponto t_0 .

Neste novo caso, vetorial, $\vec{f}'(t_0)$ representará o vetor tangente ao gráfico de \vec{f} no ponto t_0 . De fato; considere o caso \mathbb{R}^3 .

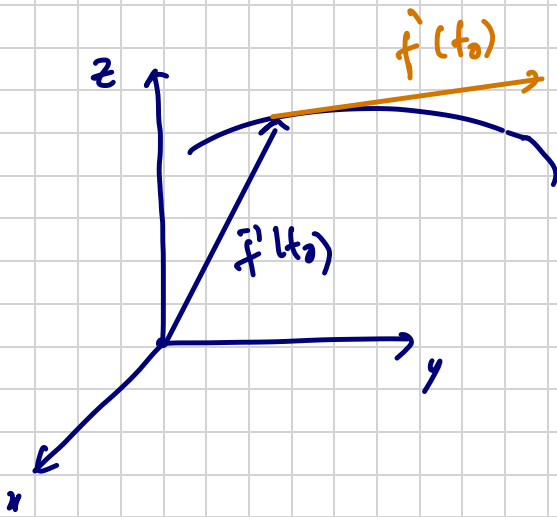


$\vec{f}'(t_0 + h) - \vec{f}'(t_0)$ - é o vetor diferença.

Fazendo o limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{f}'(t_0 + h) - \vec{f}'(t_0)}{h},$$

vamos encontrar o vetor tangente ao gráfico de \vec{f} em t_0 , e denotamos por $\vec{f}'(t_0)$.



$\vec{f}'(t_0)$ representa o vetor tangente ao gráfico de \vec{f} no ponto t_0 .

Def.: Dizemos que $\vec{f}: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^m$ é derivável se $\exists \vec{f}'(t_0)$, $\forall t_0 \in (a, b)$, ou seja, se ela for derivável em todos os pontos do seu domínio.

Neste caso definiremos a função derivada

$$\vec{f}': (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^m \quad \text{por}$$

$$\vec{f}'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{f}(t+h) - \vec{f}(t)}{h}$$

PROPOSIÇÃO: Seja $\vec{f}: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função
derivável. Então, sua derivada $\vec{f}'(t)$ é
dada por: sendo

$$\vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_m(t)),$$

então,

$$\vec{f}'(t) = (f_1'(t), f_2'(t), \dots, f_m'(t))$$

DEMONSTRA: De fato,

$$\begin{aligned}\vec{f}'(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{f}(t+h) - \vec{f}(t)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot (\vec{f}(t+h) - \vec{f}(t)) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot (f_1(t+h) - f_1(t), f_2(t+h) - f_2(t), \dots, \\ &\quad \dots, f_m(t+h) - f_m(t))\end{aligned}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f_1(t+h) - f_1(t)}{h}, \dots, \frac{f_m(t+h) - f_m(t)}{h} \right)$$

$$= \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_1(t+h) - f_1(t)}{h}, \dots, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_m(t+h) - f_m(t)}{h} \right)$$

$$= (f_1'(t); f_2'(t), \dots, f_m'(t))$$

□

Ex. calcule $\vec{f}'(t)$ para

$$\vec{f}(t) = (\sqrt{t^2 - t}, \ln(t+1), \cos(3t-4)).$$

Solução: Lembrando:

$$\bullet f_1(t) = (t^2 - t)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f_1'(t) = \frac{1}{2} (t^2 - t)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2t - 1)$$

$$\Rightarrow f_1'(t) = \frac{2t - 1}{2\sqrt{t^2 - t}}$$

$$\bullet f_2(t) = \ln(t+1) \Rightarrow f_2'(t) = \frac{1}{t+1}$$

$$\bullet f_3(t) = \cos(3t-4) \Rightarrow f_3'(t) = -\sin(3t-4) \cdot 3$$

$$\Rightarrow f_3'(t) = -3 \sin(3t-4)$$

Portanto, obtemos:

$$\vec{f}'(t) = \left(\frac{2t-1}{2\sqrt{t^2-1}}, \frac{1}{t+1}, -3 \sin(3t-4) \right)$$

Lembrando da ALGA, dada um vetor \vec{u} qualquer, o vetor unitário, na mesma direção e sentido de \vec{u} era o VETOR de \vec{u} , e calculá-lo por:

$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \text{ onde}$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \quad (\text{em } \mathbb{R}^3)$$

Isto posto, dada a função vetorial $\vec{f}(t)$,
o vetor tangente unitário em um ponto t_0
será dado por

$$\frac{\vec{f}'(t_0)}{\|\vec{f}'(t_0)\|}.$$

ex: Encontre o vetor tangente unitário ao
gráfico de $\vec{f}(t) = (\sin t, 2t, \cos t)$,
no ponto $t_0 = 0$.

Solução:

Seja:

$$\vec{f}'(t) = (\cos t, 2, -\sin t)$$

Então:

$$\vec{f}'(0) = (\cos 0, 2, -\sin 0) = (1, 2, 0)$$

\Rightarrow vetor tangente em $t=0$ será o

vetor $\vec{u} = (1, 2, 0)$. Como

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{(1)^2 + (2)^2 + 0^2} = \sqrt{5}.$$

Então, o vetor tangente unitário em $t=0$ será:

$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{u}'}{\|\vec{u}'\|} = \frac{1}{\|\vec{u}'\|} \cdot \vec{u}'$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (1, 2, 0) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0 \right)$$

PROPOSIÇÃO: Valem as seguintes propriedades para funções $\vec{f}, \vec{g}: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$:

$$(i) \quad (\vec{f} + \vec{g})' = \vec{f}' + \vec{g}'$$

$$(ii) \quad (\vec{f} \cdot \vec{g})' = \vec{f}' \cdot \vec{g}' + \vec{f}' \cdot \vec{g} \quad \text{onde o ponto "." denota o produto escalar.}$$

$$(iii) \quad (\vec{f} \times \vec{g})' = \vec{f}' \times \vec{g}' + \vec{f}' \times \vec{g}'$$

DEMONSTRAÇÃO: Trataríamos o item (iii).

$$\text{Sejam } \vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t)) \text{ e}$$

$$\vec{g}(t) = (g_1(t), g_2(t), g_3(t))$$

Assim, temos:

$$\vec{f} \times \vec{g} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \end{vmatrix}$$

$$= (f_2 g_3 - f_3 g_2) \vec{i} + (f_3 g_1 - f_1 g_3) \vec{j} + (f_1 g_2 - f_2 g_1) \vec{k}$$

Assim, derivando $\vec{f} \times \vec{g}$, obtemos:

$$(\vec{f} \times \vec{g})' = \left((f_2 g_3 - f_3 g_2)', (f_3 g_1 - f_1 g_3)', (f_1 g_2 - f_2 g_1)' \right)$$

$$= (f_2 \cdot g_3' + f_2' g_3 - f_3 \cdot g_2' - f_3' g_2),$$

$$f_3 g_1' + f_3' g_1 - f_1 g_3' - f_1' g_3,$$

$$f_1 g_2' + f_1' g_2 - f_2 g_1' - f_2' g_1) =$$

$$\begin{aligned}
&= (f_2 g_3' - f_3 g_2', f_3 g_1' - f_1 g_3', f_1 g_2' - f_2 g_1') + \\
&\quad + (f_2' g_3 - f_3' g_2, f_3' g_1 - f_1' g_3, f_1' g_2 - f_2' g_1) \\
&= \begin{vmatrix} \bar{x} & \bar{f} & \bar{x}' \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1' & g_2' & g_3' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{x} & \bar{f} & \bar{x}' \\ f_1' & f_2' & f_3' \\ g_1 & g_2 & g_3 \end{vmatrix} \\
&= \underline{\underline{\vec{f}' \times \vec{g}' + \vec{f} \times \vec{g}}}. \quad \square
\end{aligned}$$

Para funções $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ (ou seja, funções escalares), temos a seguinte conceito.

Def: Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ uma função escalar a m variáveis reais onde Ω é um aberto de \mathbb{R}^m . Definimos a derivada parcial de f em relação à variável x_i , por:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \dots, x_m) - f(x_1, \dots, x_m)}{h},$$

se este limite existir.

No caso $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definiremos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} \quad e$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h};$$

respectivamente, as derivadas parciais em relação a x e em relação a y .

Quando derivamos em relação a uma das variáveis, todas as demais são consideradas constantes. Então, usam-se todas as regras do cálculo.

Ex: $f(x, y) = x^2 + 5x^3y^2.$

Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}.$

Solução:

• $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 15x^2y^2$ (y é constante)

• $\frac{\partial f}{\partial y} = 0 + 5x^3 \cdot (2y)$ (x é constante)

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = 10x^3y$

obs: o símbolo ∂ é chamado de D-ROND.