CÁLCULO 3, TURMA T2

$\boxed{10/04/26 - \text{AULA } 08}$

TEOREMA: (TEOREMA DO SANDUÍCHE)

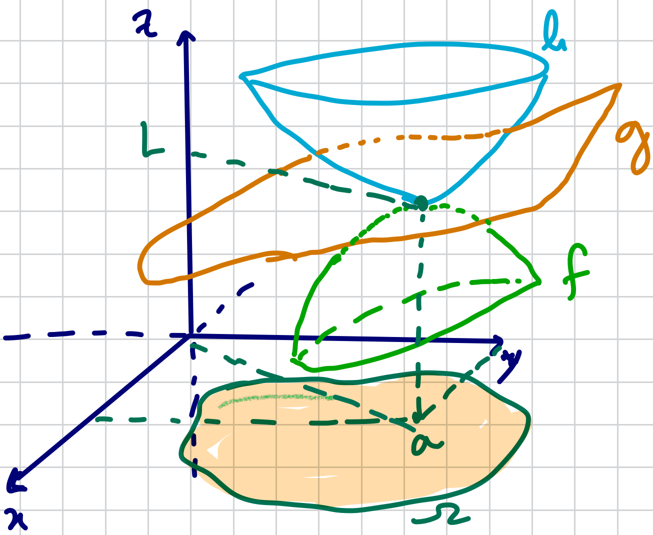
Sejam $f, g, h : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ (escalares);

$a \in \mathbb{R}^m$ um ponto de acumulação do conj. Ω,

e, $\forall x \in \Omega$, tem-se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.

Se $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$, então

$$\lim_{x \to a} g(x) = L.$$



DEMONSTR.: Sejam $f, g, h : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ tais que

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x).$$

Dado $\varepsilon > 0$ qualquer.

Como $\lim_{x \to a} f(x) = L$, então, $\exists\, \delta_1 > 0$ tal que,

$$\forall x \in \Omega: \quad 0 < d(x, a) < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon. \quad (*)$$

Como $\lim_{x \to a} h(x) = L$, então $\exists\, \delta_2 > 0$ tal que,

$$\forall x \in \Omega: \quad 0 < d(x, a) < \delta_2 \Rightarrow |h(x) - L| < \varepsilon \quad (**)$$

Tome $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$.

Assim, $\forall x \in \Omega$ tal que $0 < d(x, a) < \delta$,

seguem $(*)$ e $(**)$; ou seja:

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{e} \quad |h(x) - L| < \varepsilon.$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$|w| \leq a \Leftrightarrow -a \leq w \leq a$

$$-\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon \;\; +L \qquad\qquad -\varepsilon < h(x) - L < \varepsilon \;\; +L$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\underbrace{L - \varepsilon < f(x)} < L + \varepsilon \qquad\qquad L - \varepsilon < \underbrace{h(x) < L + \varepsilon}$$

Como por hipótese temos

$$\underbrace{f(x)} \leq g(x) \leq \underbrace{h(x)},$$

$$\Rightarrow L-\varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L+\varepsilon$$

Então, segue que

$$L-\varepsilon < g(x) < L+\varepsilon, \quad (-L)$$

ou seja,

$$-\varepsilon < g(x) - L < \varepsilon, \quad \text{i.e.};$$

$$|g(x) - L| < \varepsilon,$$

sempre que $0 < d(x,a) < \delta$.

Ou seja, mostramos que $\lim_{x\to a} g(x) = L$.

$\square$

Vejamos um exemplo de aplicação desse teorema.

LISTA 03:

7. Sabendo que

$$1 - \frac{x^2y^2}{3} < \frac{\arctan xy}{xy} < 1,$$

o que pode-se dizer sobre

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\arctan xy}{xy} \text{? Justifique.}$$

Solução: Note que,

- $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 1-\frac{x^2y^2}{3} = 1-\frac{0}{3} = 1.$$

- $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 1 = 1.$$

Ou seja, obtemos:

$$\underbrace{1-\frac{x^2y^2}{3}}_{\xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 1} < \frac{\arctan xy}{xy} < \underbrace{1.}_{\xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 1}$$

$$\Bigg\Downarrow \; \text{T. DO SANDUÍCHE}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\arctan xy}{xy} = 1.$$

L3:

9. Calcule, se existir, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\cos\frac{1}{y}$, lembrando que $|\cos\alpha| \leq 1$, $\forall\alpha\in\mathbb{R}$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x.\cos\frac{1}{y} = ?$$

Como, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\underbrace{|\cos\alpha| \leq 1}$, segue que,

sendo $f(x,y) = x.\cos\frac{1}{y}$, então:

$$0 \leq |f(x,y)| = \left|x.\cos\frac{1}{y}\right| = |x|.\underbrace{\left|\cos\frac{1}{y}\right|}_{\leq 1} \leq |x|.1 = |x|$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq |f(x,y)| \leq |x|$$

Como $\lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 = 0$ e $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |x| = |0| = 0$

Então, pelo T. do Sanduíche, segue que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 .$$

FUNÇÕES CONTÍNUAS:

Def.: Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uma função, e $a \in \Omega' \cap \Omega$. Dizemos que f é contínua no ponto a se, e somente se, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, tal que $\forall x \in \Omega$: $d_{\mathbb{R}^m}(x, a) < \delta \Rightarrow d_{\mathbb{R}^n}(f(x), f(a)) < \varepsilon$.

→ ou seja, $a \in \mathbb{R}^m$ é um ponto de acumulação que está em Ω.

Ou seja, dizemos que $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é contínua em $a \in \Omega$ se, e somente se,

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Este conceito também vale para funções vetoriais de uma variável real. Ou seja, $\vec{f}: \Omega \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ é contínua em $a \in \Omega$ se, e somente se,

$$\lim_{t \to a} \vec{f}(t) = \vec{f}(a).$$

Exr: LISTA 03

13. Nos exercícios a seguir verifique se f é contínua na origem.

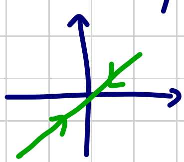
(a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, \quad \text{se} & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Solução: Note que $f(0,0) = 0$

Perguntamos: $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$?

Note que:

- $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=x}} \dfrac{x+y}{x^2+y^2} = \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=x}} \dfrac{x+x}{x^2+x^2} =$



$= \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=x}} \dfrac{\cancel{2}\cancel{x}}{\cancel{2}x^{\cancel{2}}} = \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=x}} \dfrac{1}{x} = \nexists$

Como por este caminho o limite não existe, conclui-se que $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$.

Portanto f não é cont. em $(0,0)$.

(d) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2y^2 - 3xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, \quad \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Note que $f(0,0) = 0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2y^2 - 3xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = ?$$

Vamos mostrar que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Dado $\varepsilon > 0$. Precisamos achar $\delta > 0$, tal que,

$\forall (x,y) \in D(f)$ tal que $0 < d_2((x,y);(0,0)) < \delta$,

implique que $|f(x,y) - 0| < \varepsilon$

$\underline{\underline{0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta}}$

Analisando $|f(x,y) - 0|$, temos:

$$|f(x,y) - 0| = \left| \frac{2y^2 - 3xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq \frac{2y^2 + 3|x|.|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$|a+b| \leq |a|+|b|$

Como $|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}$,

$y^2 \leq x^2+y^2$; e

$$|y| = \sqrt{y^2} \le \sqrt{x^2+y^2}\text{, então:}$$

$$|f(x,y)-0| \le \frac{2y^2+3|x|\cdot|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le$$

$$\le \frac{2\cdot(x^2+y^2)+3\cdot\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \frac{2(x^2+y^2)+3\cdot(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \frac{5\cdot(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} \times \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{5\cdot\cancel{(x^2+y^2)}\sqrt{x^2+y^2}}{\cancel{x^2+y^2}}$$

$$= 5\cdot\underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{<\delta} < 5\delta := \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \delta = \frac{\varepsilon}{5}.$$

Isso prova que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

Assim, como

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0),$$

segue que f é contínua na origem.

<u>obs.:</u> Uma outra forma de provar que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ seria:

$$0 \leq |f(x,y)| = \left| \frac{2y^2 - 3xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq \frac{2y^2 + 3|x|\cdot|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\leq \frac{2(x^2+y^2) + 3\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \frac{5(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= 5\sqrt{x^2+y^2}$$

Ou seja:

$$\underbrace{0}_{\substack{\downarrow \\ 0 \\ (x,y)\to(0,0)}} \leq |f(x,y)| \leq \underbrace{5\sqrt{x^2+y^2}}_{\substack{\downarrow \\ 0 \\ (x,y)\to(0,0)}}$$

$$\Downarrow \text{ T. Sanduíche}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

$\Rightarrow$ f é cont. na origem.

Def.: Dizemos que $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é contínua se for contínua em todos os pontos do seu domínio Ω.

PROPOSIÇÃO: Sejam $f, g: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ funções contínuas. Então, $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ e f/g são contínuas. A última, onde $g(x) \neq 0$.

PROPOSIÇÃO: A composição de funções contínuas resulta em uma função contínua.

Mais precisamente, sejam $f : A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, contínua em todo $a \in A$; $g : B \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ contínua em todo $b \in B$; com $f(A) \subset B$.

Então, $g \circ f : A \to \mathbb{R}^p$ é contínua no mesmo ponto $a \in A$, $\forall a \in A$.

DEMONSTRAÇÃO: Análoga ao cálculo 1.