CÁLCULO 3, TURMA T3

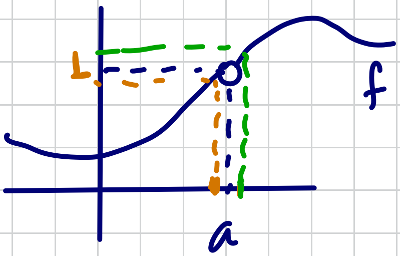
08/04/26 – AULA 07

Na aula passada iniciamos o estudo de limites.

No que segue, vamos mostrar um resultado que corresponde, num certo sentido, à generalização do cálculo de limites laterais.

Lembrando do cálculo 1, tínhamos:

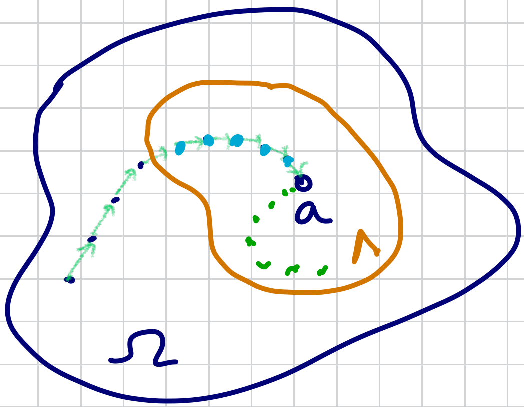
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) \iff \exists \lim_{x\to a} f(x)$$



No caso para funções escalares ($\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$) teremos o seguinte resultado:

PROPOSIÇÃO: Sejam $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função, $\Lambda \subset \Omega$, $\Lambda \neq \emptyset$; $a \in \Omega' \cap \Lambda'$ (ou seja, $a \in \mathbb{R}^m$ é um ponto de acumulação de Ω e de Λ. Então:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in \Lambda}} f(x).$$



DEMONSTR.: Suponha que $\exists \lim_{x \to a} f(x) = l$.

E, seja $\Lambda \neq \emptyset$; $\Lambda \subset \Omega$.

Dado $\varepsilon > 0$, então $\exists \delta > 0$ tal que, $\forall x \in \Omega$ tal que $0 < d(x,a) < \delta$, implica em $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Em particular, $\forall x \in \Lambda \subset \Omega$, tal que $0 < d(x,a) < \delta$ segue que $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Ou seja, acabamos de mostrar que

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = l = \lim_{x \to a} f(x)$$

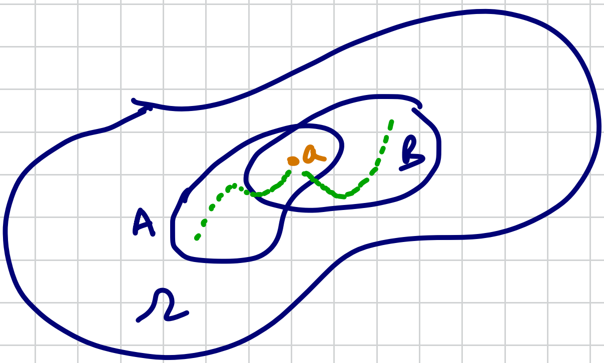
$\square$

Corolário: Sejam $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ função, $A, B \subset \Omega$ conjuntos não vazios de Ω; $a \in A' \cap B' \cap \Omega'$ (ou seja, $a \in \mathbb{R}^m$ é um ponto de acumulação dos conjuntos A, B e Ω.

Então, se

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) \neq \lim_{\substack{x \to a \\ x \in B}} f(x),$$

então $\nexists \lim_{x \to a} f(x)$.



Obs.: O equivalente a este resultado, na reta é:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x)$$

então $\nexists \lim_{x \to a} f(x)$.

DEMONSTR.: Por absurdo, suponha que

$$\exists \lim_{x \to a} f(x) = l.$$

Sejam $A, B \subset \Omega$, onde $a \in \mathbb{R}^m$ seja ponto de acumulação desses três conjuntos. Então, pela proposição anterior, tem-se:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \; ; \\ \text{e} \\ \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in B}} f(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in B}} f(x)$$

Mas $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) \neq \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in B}} f(x)$, por hipótese.

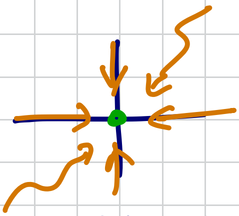
Absurdo! Portanto, $\nexists \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Obs.: $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x)$ e $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in B}} f(x)$ são limites por caminhos diferentes.

Ex.: Verifique se existem os limites a seguir:

01) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4x^2y}{x^3+y^3}.$$

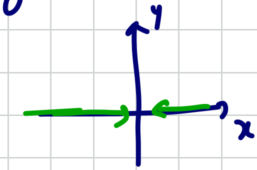
Solução:



Vamos considerar os seguintes caminhos: ↓ PASSANDO POR (0,0)

- $\Lambda_1 = \{(x,y)\in \mathbb{R} : y=0\}$.

↳ eixo x.



Assim:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\in\Lambda_1}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \frac{4x^2y}{x^3+y^3} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \frac{4x^2\cdot 0}{x^3+0^3}$$

$$= \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \frac{0}{x^3} = 0$$

- $\Lambda_2 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=x\}$

Assim:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\in\Lambda_2}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \frac{4x^2y}{x^3+y^3} =$$

$$= \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \frac{4x^2\cdot x}{x^3+x^3} =$$

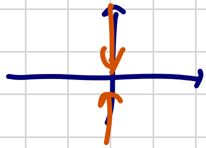
$$= \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \frac{4\cancel{x^3}}{2\cancel{x^3}} = 2.$$

Assim, $\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\in\Lambda_1}} f(x,y) = 0 \neq 2 = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\in\Lambda_2}} f(x,y).$

Logo, $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$

02) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x^2+y^2} = ?$

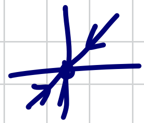
• $\Lambda_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x = 0\}$ ↪ eixo y



Neste caminho, temos:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in A_1}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\x=0}} \frac{x}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\x=0}} \frac{0}{y^2} = 0$$

• $A_2 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y = x\}$



Neste caso, teremos:

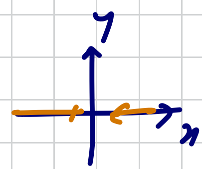
$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=x}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=x}} \frac{x}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=x}} \frac{x}{x^2+x^2}$$

$$= \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=x}} \frac{1}{2x} = \nexists$$

Conclusão: $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x^2+y^2}$.

03) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = ?$$

• $A_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y = 0\}$ ↳ eixo x.

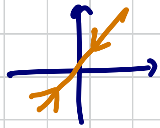


Neste caso, teremos:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \frac{x^2\cdot 0}{x^2+0^2}$$

$$= \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \frac{0}{x^2} = 0$$

- $A_2 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y = x\}$

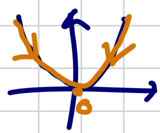


Neste caso, temos:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \frac{x^2\cdot x}{x^2+x^2}$$

$$= \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \frac{x^{\cancel{3}}}{2\cancel{x^2}} \quad \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \frac{x}{2} = 0$$

- $A_3 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y = x^2\}$



Neste caso, temos:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2}} \frac{x^2y}{x^2+y^2} =$$

$$= \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2}} \frac{x^2 \cdot x^2}{x^2+(x^2)^2} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2}} \frac{x^4}{x^2+x^4}$$

$$= \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2}} \frac{x^{\cancel{4}\,2}}{\cancel{x^2}(1+x^2)} =$$

$$= \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2}} \frac{x^2}{1+x^2} = \frac{0}{1+0} = 0$$

Assim, por 3 caminhos diferentes, o limite resultou em zero. Então, conjecturamos que o limite exista e seja zero.

AF.: $\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0.$

Dado $\varepsilon > 0$, precisamos encontrar $\delta > 0$ tal que,

$\forall\ (x,y) \in D(f)$: $\quad \underline{0 < d((x,y);(0,0))} < \delta$,

implique $|f(x,y) - 0| < \varepsilon$.

$$0 < \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} < \delta$$

$$0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta.$$

Analisando $|f(x,y) - 0|$; temos:

$$|f(x,y) - 0| = |f(x,y)| = \left| \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \right| = \frac{x^2 \cdot |y|}{x^2+y^2}.$$

Como $|y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{y^2+x^2} < \delta$, então:

$$|f(x,y) - 0| = \frac{x^2 |y|}{x^2+y^2} < \frac{x^2 \cdot \delta}{x^2+y^2} <$$

$x^2 \leq x^2+y^2$

$$< \frac{\cancel{(x^2+y^2)} \cdot \delta}{\cancel{x^2+y^2}} = \delta := \varepsilon$$

Ou seja, basta tomar $\boxed{\delta = \varepsilon}$.

Isso prova que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

PROPOSIÇÃO: Sejam $f, g : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ funções escalares; $a \in \Omega'$. Então, valem as propriedades:

(i) $\lim_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$

(ii) $\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$

(iii) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$; desde que $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$.

Voltando para o estudo de funções $\vec{f} : \Omega \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, $f : \Omega \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$.

Dado $a \in \Omega' \subset \mathbb{R}$; $\vec{l} = (l_1, l_2, l_3) \in \mathbb{R}^3$; então:

$\lim_{t \to a} \vec{f}(t) = \vec{l} \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $\forall t \in \Omega \subset \mathbb{R} : t \in B_\delta(a) \setminus \{a\}$, implique em $\vec{f}(t) \in B_\varepsilon(\vec{l})$.

Ou seja, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, tal que, $\forall t \in \Omega \subset \mathbb{R}$;

$$0 < |t - a| < \delta \implies d_2(\vec{f}(t), \vec{l}) < \varepsilon,$$

i.e.,
$$\sqrt{(f_1(t) - l_1)^2 + (f_2(t) - l_2)^2 + (f_3(t) - l_3)^2} < \varepsilon$$

Recordado este conceito, tem-se o seguinte resultado prático:

<u>PROPOSIÇÃO</u>: Seja $\vec{f} : \Omega \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ função vetorial de uma variável real, $a \in \Omega'$. Então:

$$\lim_{t \to a} \vec{f}(t) = \left(\lim_{t \to a} f_1(t), \lim_{t \to a} f_2(t), \dots, \lim_{t \to a} f_m(t) \right)$$

[ou seja, o cálculo do limite de uma função vetorial resume-se ao cálculo do limite de cada função coordenada].

<u>DEMONSTR.</u>: Seja $\vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_m(t))$

$a \in \Omega'$.

Suponha que $\exists \lim_{t \to a} \vec{f}(t) = \vec{l} = (l_1, l_2, \dots, l_m)$

Assim, dado $\varepsilon > 0$, segue que $\exists\, \delta > 0$ tal que $\forall\, t \in \Omega : 0 < |t - a| < \delta \Rightarrow d_2(\vec{f}'(t), \vec{\ell}') < \varepsilon$.

Analisando $d_2(\vec{f}'(t), \vec{\ell})$ (que já sabemos ser $< \varepsilon$)

$$d_2(\vec{f}'(t), \vec{\ell}') < \varepsilon \iff$$

$$\sqrt{(f_1(t) - \ell_1)^2 + (f_2(t) - \ell_2)^2 + \dots + (f_m(t) - \ell_m)^2} < \varepsilon.$$

$$\iff \begin{cases} \sqrt{(f_1(t) - \ell_1)^2} < \varepsilon \iff |f_1(t) - \ell_1| < \varepsilon \\ \sqrt{(f_2(t) - \ell_2)^2} < \varepsilon \iff |f_2(t) - \ell_2| < \varepsilon \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \sqrt{(f_m(t) - \ell_m)^2} < \varepsilon \iff |f_m(t) - \ell_m| < \varepsilon. \end{cases}$$

Ou seja, para cada $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, temos que $|f_i(t) - \ell_i| < \varepsilon$, sempre que $0 < |t - a| < \delta$, i.e.,

$$\lim_{t \to a} f_i(t) = \ell_i$$

Então:

$$\lim_{t\to a} \vec{f}(t) = \vec{l} = (l_1, l_2, \dots, l_m)$$

$$= \left(\lim_{t\to a} f_1(t), \lim_{t\to a} f_2(t), \dots, \lim_{t\to a} f_m(t) \right)$$

Reciprocamente, suponha que

$$\exists \left(\lim_{t\to a} f_1(t), \lim_{t\to a} f_2(t), \dots, \lim_{t\to a} f_m(t) \right) = (l_1, \dots, l_m)$$

Mostrar: $\exists \lim_{t\to a} \vec{f}(t) = \vec{l}$.

Dado $\varepsilon > 0$.

Como $\lim_{t\to a} f_i(t) = l_i$, $i \in \{1, 2, \dots, m\}$,

então, $\exists \delta_i > 0$ tal que, $\forall t \in \Omega : 0 < |t-a| < \delta_i$,

segue que $|f_i(t) - l_i| < \frac{\varepsilon}{m}$.

Tome $\delta = \min_{i\in\{1,\dots,m\}} \delta_i > 0$. Assim,

para $0 < |t-a| < \delta$, valem todas as estimativas $|f_i(t) - l_i| < \frac{\varepsilon}{m}$ $i \in \{1, \dots, m\}$

Dimo:

$$|f_1(t) - l_1| + |f_2(t) - l_2| + \dots + |f_m(t) - l_m| <$$

$$< \underbrace{\frac{\varepsilon}{m} + \frac{\varepsilon}{m} + \dots + \frac{\varepsilon}{m}}_{m \text{ aditivos}} = \varepsilon$$

ou seja, $d_1(\vec{f}(t), l_m) < \varepsilon$.

Isso mostra que $\lim_{t \to a} \vec{f}(t) = \vec{l}$. ◻

Ex: Calcule

$$\lim_{t \to 1} \left(\frac{t^2 - 1}{t^3 - t^2}, \frac{\sqrt{t} - 1}{t - 1} \right),$$ se existir.

Solução:

Como $\lim_{t \to 1} \frac{t^2 - 1}{t^3 - t^2} = \lim_{t \to 1} \frac{(t+1)\cancel{(t-1)}}{t^2\cancel{(t-1)}} =$

$$= \lim_{t \to 1} \frac{t+1}{t^2} = 2$$

e

$$\lim_{t\to 1} \frac{\sqrt{t}-1}{t-1} \times \frac{\sqrt{t}+1}{\sqrt{t}+1} = \lim_{t\to 1} \frac{\cancel{t-1}}{\cancel{(t-1)}(\sqrt{t}+1)} =$$

$$= \lim_{t\to 1} \frac{1}{\sqrt{t}+1} = \frac{1}{2}$$

Portanto,

$$\lim_{t\to 1} \vec{f}(t) = \left(2, \frac{1}{2}\right).$$