CÁLCULO 3, TURMA T3

06/04/26 - AULA 06

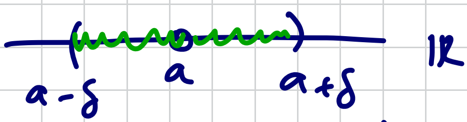
LIMITES DE FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS REAIS.

Def: Seja $X \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto não vazio. Dizemos que um ponto $a \in \mathbb{R}^m$ é um <u>ponto de acumulação</u> do conjunto X se $\forall\, \delta > 0$,

$$\left(B_\delta(a) \setminus \{a\}\right) \cap X \neq \emptyset.$$

Ex: $X = \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Então, $a = \sqrt{2} \in \mathbb{R}$ (e, note que $\sqrt{2} \notin X$) é um ponto de acumulação para o conjunto X, pois, dado $\delta > 0$, então,

$$B_\delta(a) = (a - \delta, a + \delta)$$



Como $X = \mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, então,

$$\left(B_\delta(a) \setminus \{a\}\right) \cap X \neq \emptyset,$$

pois, por menos que seja o intervalo $\underbrace{(a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)}_{B_\delta(a) \setminus \{a\}}$, sempre não existiria número racional nesse intervalo, ou seja

$$\underbrace{\Big((\underset{a}{\sqrt{2}}-\delta,\underset{a}{\sqrt{2}})\cup(\underset{a}{\sqrt{2}},\underset{a}{\sqrt{2}}+\delta)\Big)\cap \underset{X}{\mathbb{Q}}}_{(B_\delta(a)\setminus\{a\})\cap X\neq\emptyset.} \neq \emptyset.$$

Notação: o conjunto de todos os pontos de acumulação de um conjunto X é chamado de DERIVADO de X, e é denotado por X'.

Frente a este conceito podemos finalmente definir limites:

Def.: Seja $f:\Omega\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ uma função, $a\in\Omega'$ (ou seja, $a\in\mathbb{R}^m$ é um ponto de acumulação do conjunto Ω). Dizemos que $l\in\mathbb{R}^n$ é o limite da função $f(x)$ quando x tende para $a\in\mathbb{R}^m$, e escrevemos

$$\lim_{x\to a} f(x)=l \text{, se, e somente se,}$$

$\forall\, \varepsilon>0$, $\exists\, \delta>0$ tal que: $\forall x\in\Omega$ tal que

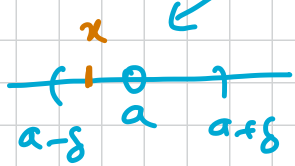
$$x\in B_\delta(a)\setminus\{a\} \implies f(x)\in B_\varepsilon(l).$$

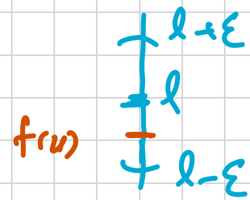
No que segue, vamos "traduzir" essa definição em alguns casos.

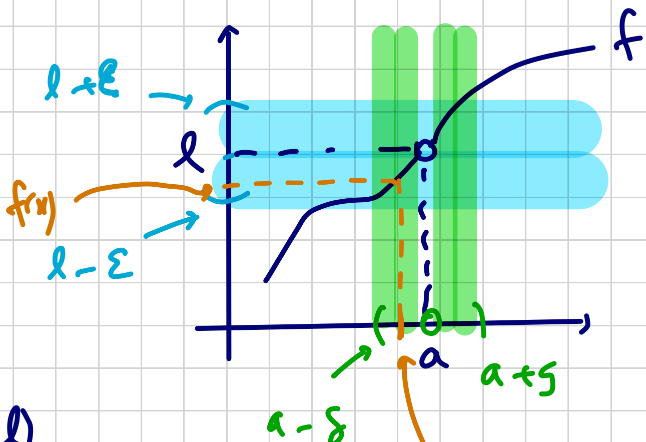
1º caso: O estudado no cálculo 1: $f : \Omega \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \overset{\text{def.}}{\iff} \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tal que, } \forall x \in \Omega,$$

$$\text{tal que } \underbrace{x \in B_\delta(a)\setminus\{a\}}\ \Rightarrow\ \underbrace{f(x) \in B_\varepsilon(\ell)}.$$







$x \rightsquigarrow x \in B_\delta(a)\setminus\{a\}$

$\Updownarrow$

$0 < |x-a| < \delta$

$f(x) \in B_\varepsilon(\ell)$

$\Updownarrow$

$|f(x) - \ell| < \varepsilon.$

Ou seja:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tal que, } \forall x \in \Omega \text{ tal que } 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

<u>2º CASO:</u> $f: \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ equipado com a métrica d_2 (euclidiana) e $\mathbb{R}^2$ equipado com a métrica da soma d_1.

Assim; dado $a \in \mathbb{R}^3$ um ponto de acumulação do conjunto Ω, segue que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tal que, } \forall x \in \Omega, \text{ tal que } x \in B_\delta(a) \setminus \{a\} \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(\ell).$$

"Traduzindo" para o contexto em que estamos, temos:

- $x \in B_\delta(a) \setminus \{a\} \Longleftrightarrow 0 < d_2(x, a) < \delta$
- $f(x) \in B_\varepsilon(\ell) \Longleftrightarrow d_1(f(x), \ell) < \varepsilon.$

Assim:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que, } \forall x \in \Omega:$$

$$0 < d_2(x, a) < \delta \longrightarrow d_1(f(x), \ell) < \varepsilon.$$

Mais ainda: como $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$ e $f(x) \in \mathbb{R}^2$, escrevendo

$$x = (x_1, x_2, x_3);$$

$$a = (a_1, a_2, a_3);$$

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x))$$

$$\ell = (\ell_1, \ell_2);$$

então:

$$d_2(x, a) = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2}$$

$$d_1(f(x), \ell) = |f_1(x) - \ell_1| + |f_2(x) - \ell_2|$$

Assim:

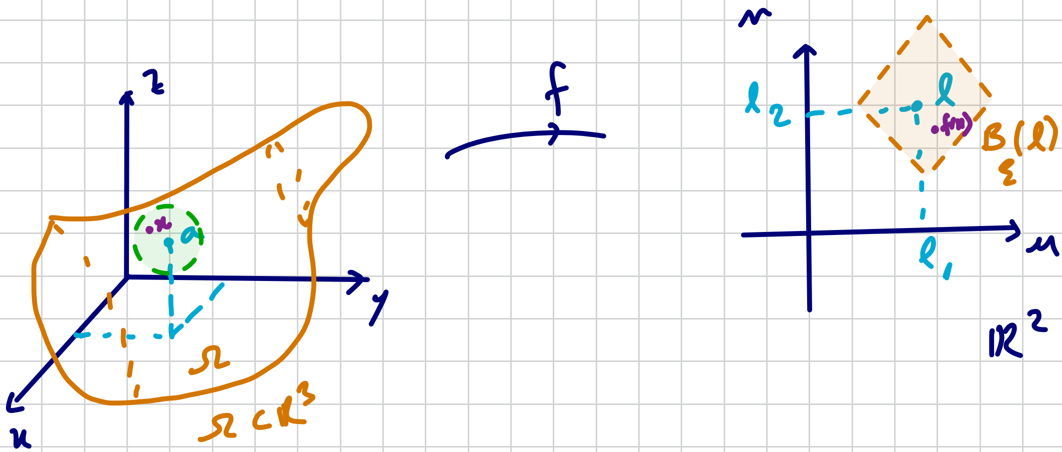
$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que, }$$

$$\forall x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3 \text{ tal que}$$

$$0 < \sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+(x_3-a_3)^2} < \delta,$$

implica em

$$|f_1(x)-\ell_1| + |f_2(x)-\ell_2| < \varepsilon.$$



3º caso: funções vetoriais de uma variável real

$f: \Omega \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$;

Dado $a \in \Omega' \subset \mathbb{R}$; $\vec{\ell} = (\ell_1, \ell_2, \ell_3) \in \mathbb{R}^3$;

então:

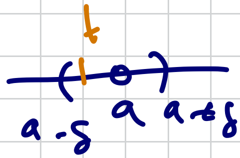
$$\lim_{t \to a} \vec{f}(t) = \vec{\ell} \iff \forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \text{ tal que}$$

$$\forall t \in \Omega \subset \mathbb{R} : t \in B_\delta(a) \setminus \{a\},$$

implique em $\vec{f}(t) \in B_\varepsilon(\vec{\ell})$.

Neste caso, temos:

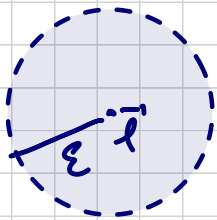
- $t \in B_\delta(a) \setminus \{a\}$:



$$\Updownarrow$$

$$0 < |t-a| < \delta$$

- $\vec{f}'(t) \in B_\varepsilon(\vec{\ell}) \subset \mathbb{R}^3$:



$$\Updownarrow$$

$$d_2(\vec{f}'(t), \vec{\ell}) < \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$\sqrt{(f_1(t)-\ell_1)^2 + (f_2(t)-\ell_2)^2 + (f_3(t)-\ell_3)^2} < \varepsilon.$$

4.º CASO: funções escalares $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $a \in \Omega'$ (ou seja, $a \in \mathbb{R}^2$ é um ponto de acumulação do conj. Ω)

$$f = f(x,y). \quad ; \quad a = (a_1, a_2)$$

Assim:

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} f(x,y) = l \in \mathbb{R} \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal}$$

que, $\forall (x,y) \in \Omega$:

$$(x,y) \in B_\delta(a_1,a_2) \setminus \{(a_1,a_2)\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x,y) \in B_\varepsilon(l) \ ;$$

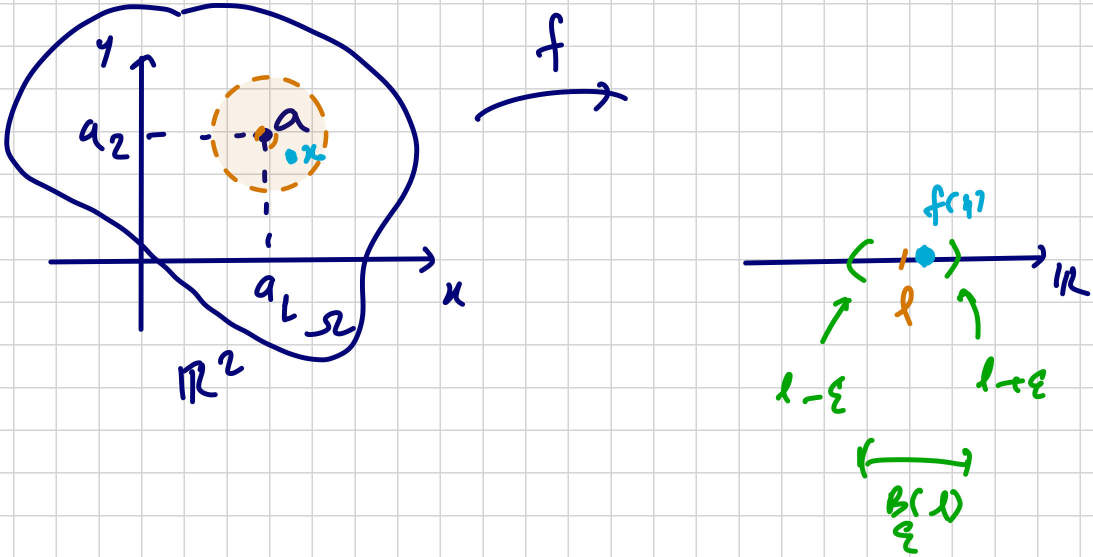
onde:

- $(x,y) \in B_\delta(a_1,a_2) \setminus \{(a_1,a_2)\} \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow 0 < d_2((x,y);(a_1,a_2)) < \delta$$

$$\Longleftrightarrow 0 < \sqrt{(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2} < \delta.$$

- $f(x,y) \in B_\varepsilon(l) \Longleftrightarrow |f(x,y) - l| < \varepsilon.$



Vejamos um exemplo:

EXEMPLO: Prove que $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-2)} (4x+5y) = -6$.

SOLUÇÃO: Dado $\varepsilon > 0$. Precisamos encontrar $\delta > 0$, tal que: $\forall x$ tal que $(x,y) \in B_\delta(1,-2) \setminus \{(1,-2)\}$, implique em $f(x,y) \in B_\varepsilon(-6)$.

Ou seja, se $0 < d_2((x,y);(1,-2)) < \delta$,

devemos mostrar que $|f(x,y) - (-6)| < \varepsilon$.

Note que:

$$0 < d_2((x,y);(1,-2)) < \delta$$

$$\Updownarrow$$

$$0 < \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} < \delta .$$

Analisando a distância $|f(x,y)+6|$, temos:

$$|f(x,y)+6| = |4x+5y+6| =$$

temos de fazer aparecer os fatores $x-1$ e $y+2$

$$= |4x - 4 + 4 + 5y + 6| =$$

$$= |4(x-1) + 5y + 10| = |4(x-1) + 5\cdot(y+2)| \leq$$

$$\leq 4.|x-1| + 5.|y-2| .$$

Como devemos impor que

$$0 < \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} < \delta,$$ então,

notando que

- $|x-1| = \sqrt{(x-1)^2} \leq \sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2} < \delta.$

$|a| = \sqrt{a^2}$

- $|y+2| = \sqrt{(y+2)^2} \leq \sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2} < \delta.$

Assim, obtemos a estimativa:

$$|f(x,y)+6| \leq 4\underbrace{|x-1|}_{<\delta} + 5\underbrace{|y-2|}_{<\delta} < 4\delta+5\delta = 9\delta := \varepsilon$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta = \frac{\varepsilon}{9}}$$

Portanto, basta tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{9}$. Isso prova que

$$\lim_{(x,y)\to(1,-2)} (4x+5y) = -6.$$

PROPOSIÇÃO: (UNICIDADE DO LIMITE) Se o limite de uma função de $\mathbb{R}^m$ para $\mathbb{R}^n$ existir, ele é único.

DEMONSTR.: Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ e $a \in \Omega'$ (ou seja, a é um ponto de acumulação do conj. Ω)

Sejam $\lim_{x \to a} f(x) = l_1$ e $\lim_{x \to a} f(x) = l_2$.

Vamos mostrar que $l_1 = l_2$.

Por absurdo, suponha que $l_1 \neq l_2$.

Assim, tome $\varepsilon = \frac{1}{2} d(l_1, l_2) > 0$.

Como $\lim_{x \to a} f(x) = l_1$, então

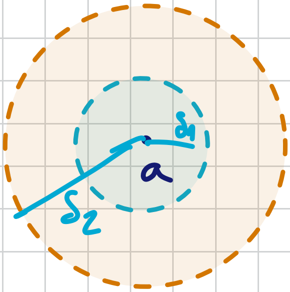
$\exists\, \delta_1 > 0$ tal que, $\forall x$:

$$x \in B_{\delta_1}(a) \setminus \{a\} \Rightarrow f(x) \in B_{\varepsilon}(l_1) \quad (*)$$

Como $\lim_{x \to a} f(x) = l_2$, então

$\exists\, \delta_2 > 0$ tal que, $\forall x$:

$$x \in B_{\delta_2}(a)\setminus\{a\} \Rightarrow f(x) \in B_{\varepsilon}(\ell_2) \quad (**)$$



Tome $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$

Assim, $\forall x \in B_{\delta}(a)\setminus\{a\}$, valem $(*)$ e $(**)$ simultaneamente, ou seja,

$$f(x) \in B_{\varepsilon}(\ell_2) \quad \text{e} \quad f(x) \in B_{\varepsilon}(\ell_1)$$

$\hookrightarrow d(f(x), \ell_2) < \varepsilon$ $\qquad$ $\hookrightarrow d(f(x), \ell_1) < \varepsilon$

Assim:

$$d(\ell_1, \ell_2) \leq \underbrace{d(\ell_1, f(x))}_{<\varepsilon} + \underbrace{d(\ell_2, f(x))}_{<\varepsilon} < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

DESIGUALDADE TRIANGULAR

Ou seja: $d(\ell_1, \ell_2) < 2\varepsilon \Rightarrow \underbrace{\dfrac{d(\ell_1, \ell_2)}{2}}_{\varepsilon} < \varepsilon$

$\Rightarrow \varepsilon < \varepsilon$. <u>Absurdo!</u>

Portanto, $\ell_1 = \ell_2$, ou seja, segue a unicidade do limite.

$\square$