CÁLCULO 3, TURMA T3

29/04/26 - AULA 14

Na aula passada estudamos diferenciabilidade no $\mathbb{R}^m$. Vimos que $f:\Omega\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ é diferenciável em $a\in \mathrm{int}(\Omega)$ se $\exists\, L:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ transformação linear tal que

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-L(x-a)}{\|x-a\|}=0.$$

Neste caso, escrevemos $L=d_af$ e é chamada de diferencial de f no ponto a. Na base canônica do $\mathbb{R}^m$, a representação matricial de L é dada pela matriz Jacobiana, ou seja, sendo $f:\Omega\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$, com $f=(f_1,f_2,\dots,f_n)$ então:

$$d_af=\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & \cdots & f_{1m}\\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & \cdots & f_{2m}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ f_{n1} & f_{n2} & f_{n3} & \cdots & f_{nm}\end{bmatrix}_{n\times m}, \text{ onde:}$$

$$f_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$$

Ex.: $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x,y,z) = \left(\operatorname{sen}(x^2+y^2),\ xyz \right)$$

Dado $a \in \mathbb{R}^3$ qualquer, determine $d_a f$.

Solução: $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. $[d_a f]_{2\times 3}$

representação natural.

Temos:

$$f(x,y,z) = \left(\underbrace{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}_{f_1},\ \underbrace{xyz}_{f_2} \right)$$

$$d_a f = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \end{bmatrix}_{2\times 3}$$, onde:

- $f_{11} = \dfrac{\partial f_1}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\operatorname{sen}(x^2+y^2) \right) = \cos(x^2+y^2).\ 2x$

$$= 2x.\cos(x^2+y^2)$$

- $f_{12} = \dfrac{\partial f_1}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\operatorname{sen}(x^2+y^2)\right) = \cos(x^2+y^2) \cdot 2y$

$$= 2y \cdot \cos(x^2+y^2)$$

- $f_{13} = \dfrac{\partial f_1}{\partial z} = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\operatorname{sen}(x^2+y^2)\right) = 0$

- $f_{21} = \dfrac{\partial f_2}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}(xyz) = y \cdot z$

- $f_{22} = \dfrac{\partial f_2}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}(xyz) = xz$

- $f_{23} = \dfrac{\partial f_2}{\partial z} = \dfrac{\partial}{\partial z}(xyz) = xy$

Assim, obtemos:

$$d_a f = \begin{bmatrix} 2x \cdot \cos(x^2+y^2) & 2y\cos(x^2+y^2) & 0 \\ yz & xz & xy \end{bmatrix},$$

$\forall\, a \in \mathbb{R}^3.$

Por fim, podemos apresentar a prova do resultado geral que motivou este estudo.

<u>PROPOSIÇÃO</u>: Se uma função $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ for diferenciável em um ponto $a \in \text{int}(\Omega)$, então f é contínua neste ponto.

<u>DEMONSTR.</u>: Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ diferenciável em $a \in \text{int}(\Omega)$. Então, $\exists\, L = d_a f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ transformação linear, na qual podemos escrever a f como

$$f(x) = f(a) + L(x-a) + \|x-a\| \cdot r(x-a) \, ;$$

onde $\displaystyle r(x-a) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$.

Tomando o limite, com $x \to a$, obtemos:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \underbrace{\lim_{x \to a} f(a)}_{f(a)} + L(x-a) + \|x-a\| \cdot r(x-a)$$

$$= f(a) + \lim_{x \to a} L(x-a) + \lim_{x \to a} \|x-a\| \cdot r(x-a)$$

$$= f(a) + \underbrace{L(0)}_{\overset{\shortparallel}{0}} + \underbrace{\|0\| \cdot r(0)}_{=0} = f(a)$$

pois L é uma transf. linear.

$$\Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = f(a),$$ ou seja, f é contínua no ponto a.

$\square$

INCREMENTO DE UMA FUNÇÃO

Def.: Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ e $a \in \text{int}(\Omega)$. Definimos o incremento de f no ponto a, e escrevemos $\Delta f(a)$ como: dado $h \in \mathbb{R}^m$ tal que $a+h \in \text{int}(\Omega)$, então

$$\Delta f(a) = f(a+h) - f(a)$$

No caso para funções escalares de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$ podemos apresentar uma interpretação geométrica para o incremento $\Delta f(a)$, como segue: seja

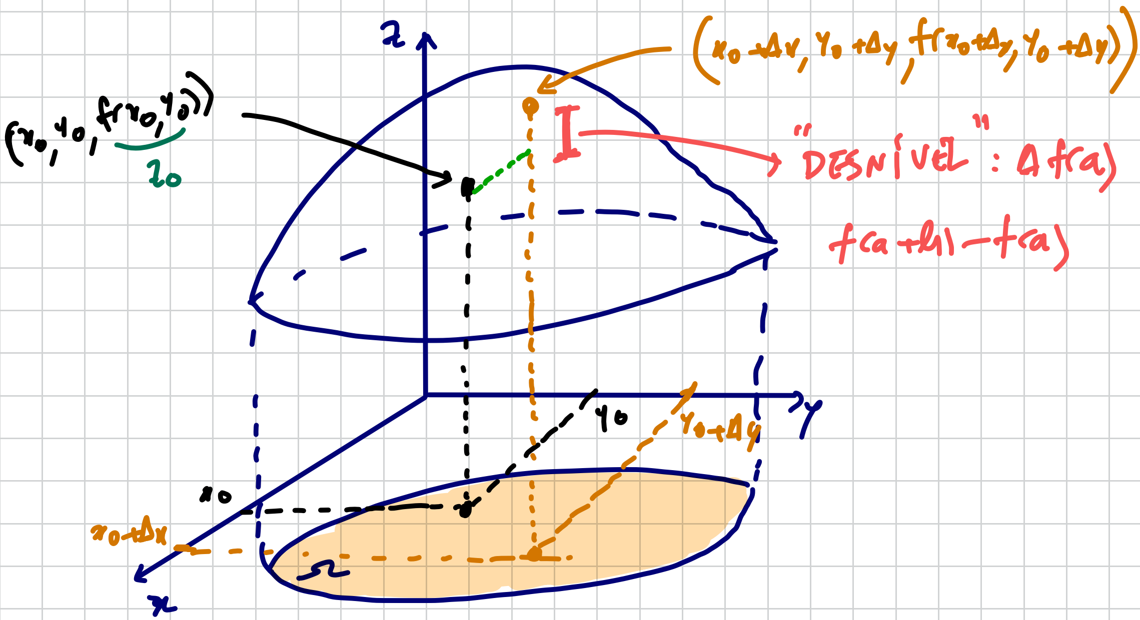
$f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $a = (x_0, y_0) \in \text{int}(\Omega)$ e

$h = (\Delta x, \Delta y)$. Então:

$$\Delta f(a) = \Delta f(x_0, y_0) = f(a+h) - f(a)$$

$$= f\left((x_0, y_0) + (\Delta x, \Delta y)\right) - f(x_0, y_0)$$

$$= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$



Isto posto, podemos apresentar uma outra definição para o diferencial de uma função:

Def.: Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ função e $a \in \operatorname{int}(\Omega)$. Dizemos que f é diferenciável no ponto a se o incremento de f no ponto a puder ser escrito como; pondo $h = (h_1, h_2, \dots, h_m) \in \mathbb{R}^m$, então,

$$\Delta f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \cdot h_2 + \dots +$$

$$\dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) \cdot h_m + \varepsilon_1 \cdot h_1 + \varepsilon_2 \cdot h_2 + \dots + \varepsilon_m \cdot h_m;$$

onde $\displaystyle \varepsilon_i \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$.

Obs.: Este conceito de diferenciabilidade via o incremento é equivalente ao estudado anteriormente. Para simplificar, considere o caso escalar $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: tome $a = (x_0, y_0)$

$h = (\Delta x, \Delta y)$. Então; do conceito de diferenciabilidade anterior $\exists\ T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ transf. linear, $T = d_a f$, tal que:

$$f(x) = f(a) + \underbrace{(d_a f)(x-a)}_{L(x-a)} + \|\underbrace{x-a}_{h}\| \cdot r(\underbrace{x-a}_{h})$$

Escrevendo $a = (x_0, y_0)$ e $\underline{x - a = h}$, então $x = a + h$. Assim:

$$\circledast \quad \underbrace{f(a+h) - f(a)}_{\Delta f(a)} = \underbrace{(d_a f)}_{\uparrow}.(h) + \|h\| . r(h)$$

matriz 1x2

$$\hookrightarrow d_a f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$h = (\Delta x, \Delta y) = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}$$

Use $\|h\| = \|(\Delta x, \Delta y)\| \underset{\text{usando } d_1}{=} |\Delta x| + |\Delta y| \underset{\Delta x, \Delta y > 0}{=} \Delta x + \Delta y$

Assim, $\circledast$ fica:

$$\Delta f(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} + (\Delta x + \Delta y) . r(h)$$

$$\Delta f(a) = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot \underbrace{\Delta x}_{h_1} + \frac{\partial f}{\partial y}\underbrace{\Delta y}_{h_2} + \Delta x . \underbrace{r(h)}_{\varepsilon_1} + \Delta y . \underbrace{r(h)}_{\varepsilon_2}$$

$$\Rightarrow \Delta f(a) = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_1 . \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y,$$

onde $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = r(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Por fim, com esta escrita, para funções escalares, temos o seguinte resultado:

PROP.: Uma função $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ (ou seja, uma função escalar) é diferenciável se e só se, todas as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ forem contínuas.

A demonstração pode ser encontrada no livro do LEITHOLD, volume 2. $\square$

Def.: O <u>DIFERENCIAL TOTAL</u> de f no ponto a é definido por

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n.$$

Então, comparando com a def. anterior de diferencial, temos que

$$df(a) \simeq \Delta f(a)$$

isto porque

$$\Delta f(a) = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n}_{\text{“}df(a)\text{”}} + \underbrace{\varepsilon_1 \Delta x_1 + \cdots + \varepsilon_n \Delta x_n}_{\text{“pequeno erro” de aproximação}}$$

$$\Rightarrow \Delta f(a) \simeq df(a).$$

Como no cálculo 1, nas variáveis independentes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se tem $\Delta x_i = dx_i$; e, então, podemos escrever o diferencial de f em a

por:

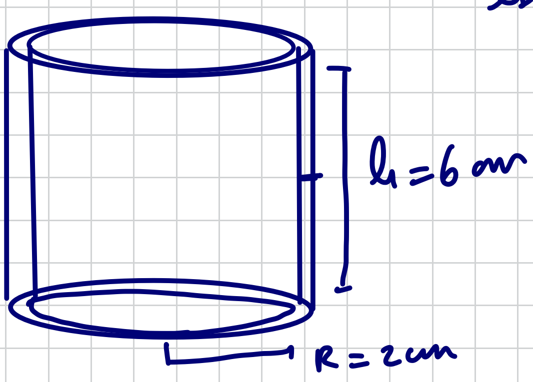
$$df(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \cdot dx_m .$$

No que segue, apresentamos um exemplo de aplicação:

EX.: Um recipiente de metal, fechado, na forma de um cilindro circular reto, tem uma altura interna de 6 cm, um raio interno de 2 cm, e uma espessura de 0,1 cm. Se o custo do material a ser usado é de R$ 10,00 por cm^3, ache por diferenciais o custo aproximado do material que será empregado na construção do recipiente.

espessura: 0,1 cm.

SOLUÇÃO:



$\Delta R = 0,1$ cm

$\Delta h = 0,1 + 0,1$

$\Delta h = 0,2$ cm

A medida do volume é dada por

$$V = Ab \cdot h$$

$$\boxed{V = \pi R^2 \cdot h}$$

Assim, o diferencial do volume será:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial R} \cdot \Delta R + \frac{\partial V}{\partial h} \cdot \Delta h \quad ,$$

onde: $\dfrac{\partial V}{\partial R} = 2\pi R h$; $\dfrac{\partial V}{\partial h} = \pi R^2$.

Assim:

$$dV = 2\pi R h \cdot \Delta R + \pi R^2 \cdot \Delta h$$

$$dV\Big|_{\substack{R=2\,;\,\Delta R=0{,}1 \\ h=6\,;\,\Delta h=0{,}2}} = 2\pi \cdot 2 \cdot 6 \cdot 0{,}1 + \pi \cdot (2)^2 \cdot 0{,}2$$

$$dV = \frac{24\pi}{10} + 4\pi \cdot \frac{2}{10} =$$

$$= \frac{12\pi}{5} + \frac{4\pi}{5} = \frac{16\pi}{5} \ cm^3$$

O custo é de R$ 10,00 por cm^3;

Então, será:

$$CUSTO = \cancel{10}^{2} \times \frac{16\pi}{\cancel{5}} = 32\pi$$

CUSTO: R$ 32π