CÁLCULO 3 - TURMA T3

22/04/26 - AULA 12

AULA DE EXERCÍCIOS

L4

3. Mostre que se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ tem derivada e $g'(t) = 0$ para $a < t < b$, então $g(t)$ é um vetor constante neste intervalo. [Sugestão: aplique o Teorema do Valor Médio a cada função coordenada.]

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ tal que $g'(t) = 0$, $\forall t \in (a,b)$.

Mostrar: $g(t)$ é vetor constante.

Seja $g(t) = (g_1(t), g_2(t), \ldots, g_n(t))$

onde cada $g_i : [a,b] \to \mathbb{R}$.

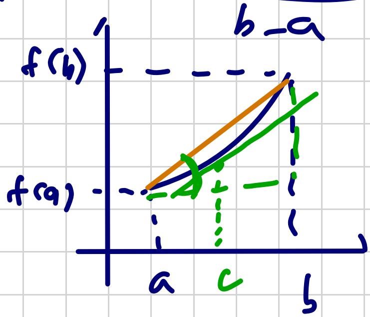
Como g é derivável, então

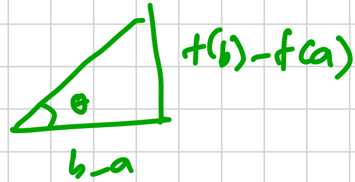
$$\exists\, g'(t) = (g_1'(t), g_2'(t), \ldots, g_n'(t))$$

e $g_i' : (a,b) \to \mathbb{R}$

Recordando o T.V.M.:

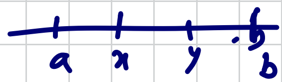
T.V.M: Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b), então, $\exists\, c\in(a,b)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.





$$\tan\theta = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Voltando ao problema: Tome $x, y \in [a,b]$, com $a < x < y < b$.



Como cada função coordenada

$g_i : [x,y] \to \mathbb{R}$ é derivável em $(x,y)\subset(a,b)$ (e cont. em $[x,y]$), estamos nas hipóteses do T.V.M. Logo, $\exists$ c_i em (x,y) tal que

$$\underbrace{g_i'(c_i)}_{=0} = \frac{g_i(y)-g_i(x)}{y-x} \Longleftarrow \frac{g_i(y)-g_i(x)}{y-x} = 0$$

pois $g'(t) = 0$ em $(x,y)\subset(a,b)$.
por hipótese.

Disso, segue que

$$g_1'(y) = g_1'(x), \quad \forall x, y \in (a,b)$$

Logo, $g_1' : [a,b] \to \mathbb{R}$ é constante; e isto para cada função coordenada.

Ou seja: $g_1(t) = \alpha_1 \in \mathbb{R}$

$$g_2(t) = \alpha_2 \in \mathbb{R}$$

$$\vdots$$

$$g_n(t) = \alpha_n \in \mathbb{R}.$$

<u>Conclusão</u>: $g(t) = (g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t))$

$$\Rightarrow g(t) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n);$$

ou seja, $g(t)$ é um vetor constante.

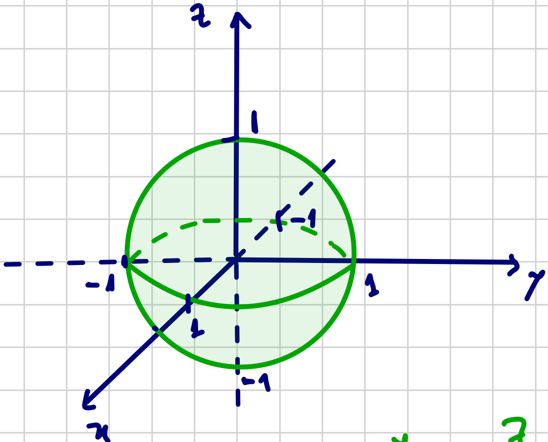
Ld:

gráfico da curva.

5. Mostre que o hodógrafo de $\vec{f}(t) = (\frac{1}{2}\,\text{sen}\,t, \frac{1}{2}\cos t, \frac{\sqrt{3}}{2})$ está sobre a esfera unitária com centro na origem. Determine um vetor tangente a essa curva, no ponto $P(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

Equação da esfera unitária com centro na origem.

$$x^2+y^2+z^2=1.$$



$$\vec{f}(t) = (\overbrace{\tfrac{1}{2}\cdot \text{sen}\,t}^{x}, \overbrace{\tfrac{1}{2}\cos t}^{y}, \overbrace{\tfrac{\sqrt{3}}{2}}^{z})$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\,\text{sen}\,t \\ y = \frac{1}{2}\cos t \\ z = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Como $x^2+y^2+z^2=1$, então,

$$\left(\frac{1}{2}\,\text{sen}\,t\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\cos t\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \overset{?}{=} 1$$

$$\frac{1}{4}\cdot \text{sen}^2 t + \frac{1}{4}\cos^2 t + \frac{3}{4} \overset{?}{=} 1$$

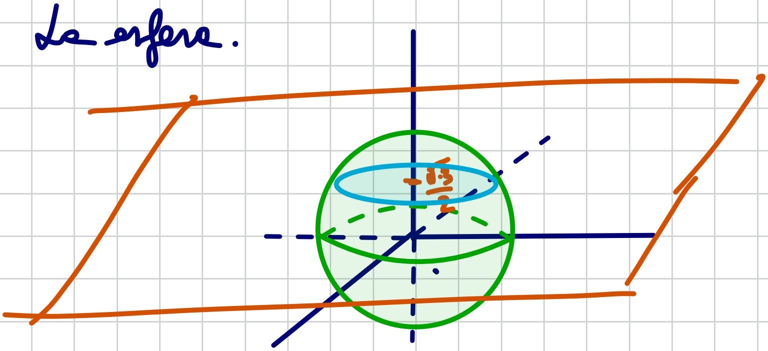
$$\frac{1}{4}\underbrace{\left(\text{sen}^2 t + \cos^2 t\right)}_{=\,1} + \frac{3}{4} \overset{?}{=} 1.$$

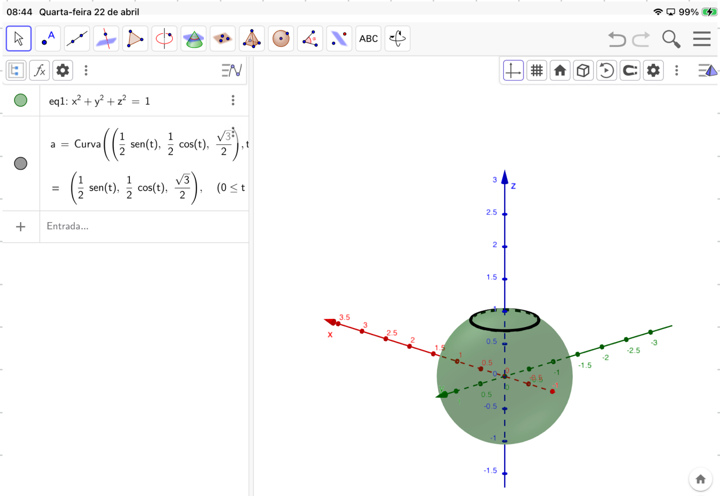
$$\frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{3}{4} \overset{?}{=} 1.$$

$$\underbrace{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}}_{=\,1} \overset{?}{=} 1 \qquad \Rightarrow 1 = 1.$$

ok!

Logo, o gráfico de $\vec{r}(t)$ está sobre a esfera pois suas equações verificam a eq. da esfera.





Vetor tangente em $p\left(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

$$\vec{f}(t) = \left(\frac{1}{2}\,\text{sen}\,t,\ \frac{1}{2}\cos t,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{f}\,'(t) = \left(\frac{1}{2}\cos t,\ -\frac{1}{2}\,\text{sen}\,t,\ 0\right)$$

reta tangente em $P\left(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Neste caso:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\,\text{sen}\,t = 0 \Rightarrow \text{sen}\,t = 0 \\ y = \frac{1}{2}\cos t = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos t = 1 \\ z = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad t = 0$$

$$\vec{f}\,'(0) = \left(\frac{1}{2}\cos 0,\ -\frac{1}{2}\cdot \text{sen}\,0,\ 0\right) = \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$$

LA:

NÃO USAMOS A DEFINIÇÃO. (VAMOS FAZER MAIS ABAIXO)

9. Calcule, ~~de acordo com a definição,~~ as derivadas parciais de cada função a seguir.

(a) $f(x,y) = 3x^2 - 4xy + 3$ (b) $f(x,y) = \sqrt{xy-1}$ (c) $f(x,y) = \ln(x^2y^2 - 3xy)$

(b) $f(x,y) = (xy-1)^{\frac{1}{2}}$ $(n^k)' = k n^{k-1} \cdot n'$

- $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2}(xy-1)^{\frac{1}{2}-1} \cdot y = \frac{y}{2\sqrt{xy-1}}$.

- $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2}(xy-1)^{\frac{1}{2}-1} \cdot x = \frac{x}{2\sqrt{xy-1}}$

(c) $f(x,y) = \ln(x^2y^2 - 3xy)$. $(\ln n)' = \frac{n'}{n}$

- $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2xy^2 - 3y}{x^2y^2 - 3xy} = \frac{\cancel{y}(2xy-3)}{\cancel{y}(x^2y - 3x)} = \frac{2xy-3}{x^2y-3x}$

- $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2x^2y - 3x}{x^2y^2 - 3xy} = \frac{\cancel{x}(2xy-3)}{\cancel{x}(xy^2-3y)} = \frac{2xy-3}{xy^2-3y}$

L4

10. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \underline{\underline{0}} & \text{se} \quad (x,y) = (\underline{\underline{0}},0) \end{cases}$. Calcule $f_1(0,0)$ e $f_2(0,0)$.

NOT.

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) \quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

Obs. IMPORTANTE: Queremos calcular a derivada parcial em um ponto, mas como neste ponto, e em sua vizinhança a função muda de sentença a única forma de calcular as derivadas parciais é através da definição.

Assim; como

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h};$$

em particular:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{\overbrace{f(0+h,0)}^{f(h,0)} - \overbrace{f(0,0)}^{0}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{h^3 - 0^3}{h^2 + 0^2} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^3}{h^2} \times \frac{1}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h^3}}{\cancel{h^3}} = 1.$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1}$$

Além disso:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0, 0+h) - \overbrace{f(0,0)}^{=0}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{0^3 - h^3}{0^2 + h^2} - 0}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h^3}{h^2} \times \frac{1}{h} = \lim_{h \to 0} -\frac{\cancel{h^3}}{\cancel{h^3}} = -1.$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -1}$$

EXTRA: f é contínua em $(0,0)$?

Para ver, devemos mostrar que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$$

AF.: $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$

Note que: $\forall (x,y) \neq (0,0)$, tem-se:

$$0 \leq |f(x,y)| = \left| \frac{x^3 - y^3}{x^2+y^2} \right| = \frac{|x^3 - y^3|}{x^2+y^2} \leq$$

$$\leq \frac{|x^3| + |y^3|}{x^2+y^2} = \frac{|x|^3 + |y|^3}{x^2+y^2} \leq$$

DESIGUALDADE TRIANGULAR DO MÓDULO

$$|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}$$

$$|y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\leq \frac{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3 + \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}{x^2+y^2} = \frac{2 \cdot \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{2 \cdot \cancel{(x^2+y^2)}\sqrt{x^2+y^2}}{\cancel{x^2+y^2}} = 2\sqrt{x^2+y^2}$$

Assim, obtemos a estimativa:

$$\underbrace{0}_{\substack{0 \\ (x,y)\to(0,0)}} \leq |f(x,y)| \leq \underbrace{2\sqrt{x^2+y^2}}_{\substack{0 \\ (x,y)\to(0,0)}}$$

$\Downarrow$ T. Sanduíche

$$|f(x,y)| \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow f(x,y) \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

Ou seja; $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$; isto é, f é contínua na origem.

No que segue, refaremos o exercício 9, obedecendo o que realmente pede:

$\Downarrow$

L1

9. Calcule, de acordo com a definição, as derivadas parciais de cada função a seguir.

(a) $f(x,y) = 3x^2 - 4xy + 3$ (b) $f(x,y) = \sqrt{xy-1}$ (c) $f(x,y) = \ln(x^2y^2 - 3xy)$

(b)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x,y)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{(x+h).y-1} - \sqrt{xy-1}}{h} =$$

$$(a-b).(a+b) = a^2 - b^2$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{xy+hy-1} - \sqrt{xy-1}}{h} \times \frac{\overbrace{\sqrt{xy+hy-1}}^{a} + \overbrace{\sqrt{xy-1}}^{b}}{\sqrt{xy+hy-1} + \sqrt{xy-1}}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{xy + hy - 1 - (xy-1)}{h\left(\sqrt{xy+hy-1} + \sqrt{xy-1}\right)} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{xy} + hy \cancel{-1} - \cancel{xy} \cancel{+1}}{h.\left(\sqrt{xy+hy-1} + \sqrt{xy-1}\right)} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}\, y}{\cancel{h}\left(\sqrt{xy+\underbrace{hy}_{\to 0}-1} + \sqrt{xy-1}\right)} =$$

$$= \frac{y}{\sqrt{xy-1}+\sqrt{xy-1}} = \frac{y}{2\sqrt{xy-1}}.$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{2\sqrt{xy-1}}}$$

Do mesmo modo:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x.(y+h)-1}-\sqrt{xy-1}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{xy+xh-1}-\sqrt{xy-1}}{h} \times \frac{\sqrt{xy+xh-1}+\sqrt{xy-1}}{\sqrt{xy+xh-1}+\sqrt{xy-1}}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{xy}+xh\cancel{-1}-\cancel{xy}\cancel{+1}}{h\left(\sqrt{xy+xh-1}+\sqrt{xy-1}\right)} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x\cancel{h}}{\cancel{h}\left(\sqrt{xy+xh-1}+\sqrt{xy-1}\right)} = \frac{x}{2\sqrt{xy-1}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{2\sqrt{xy-1}}}$$