CÁLCULO 3, TURMA T3

15/04/26 - AULA 10

Na aula anterior estudamos derivadas de funções vetoriais de uma variável real e vimos o conceito de derivação parcial para funções escalares de várias variáveis reais.

Vejamos um exemplo.

Ex.: Dado $w = f(x,y,z)$, calcule $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial f}{\partial z}$ para a função

$$w = e^{x^2y+y^2z}.$$

Solução: $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{x^2y+y^2z}\right) =$

AS VARIÁVEIS y E z, NESTE CASO, SÃO CONSTANTES

$$(e^{r})' = e^{r}\cdot r'$$

$$r = r(x)$$

$$= \left(e^{x^2y+y^2z}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2y+y^2z\right)$$

$$= e^{x^2y+y^2z} \cdot (2xy+0)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \cdot e^{x^2y+y^2z}}$$

Do mesmo modo, tem-se:

- $$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{x^2y+y^2z}\right) = e^{x^2y+y^2z} \cdot (x^2+2yz)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial y} = (x^2+2yz) \cdot e^{x^2y+y^2z}}$$

- $$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(e^{x^2y+y^2z}\right) = e^{x^2y+y^2z} \cdot \frac{\partial}{\partial z}(x^2y+y^2z)$$

$$= e^{x^2y+y^2z} \cdot (0+y^2)$$

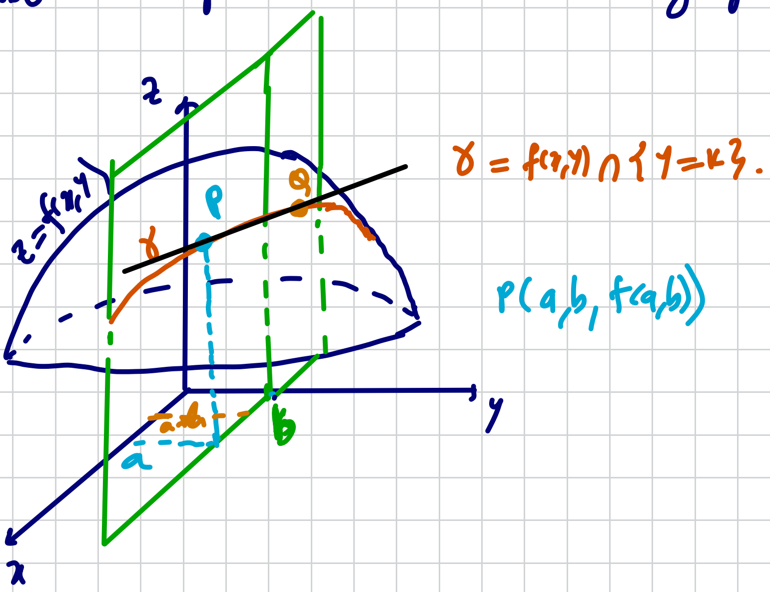
$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial z} = y^2 \cdot e^{x^2y+y^2z}}$$

SIGNIFICADO GEOMÉTRICO PARA DERIVADAS PARCIAIS.

Para funções definidas em $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$ podemos apresentar um significado geométrico para $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ em um ponto $P(a,b) \in \text{int}\,\Omega$.

Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ função com derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$. Seja $P(a,b) \in \text{int}(\Omega)$.

Vamos considerar $\frac{\partial f}{\partial x}(P)$. Neste caso, como a derivação é em x, mantemos y constante, ou seja, $y = k \in \mathbb{R}$. Seja γ a curva no $\mathbb{R}^3$ obtida pela intercepção do plano $y = b$ com o gráfico de $z = f(x,y)$.



Tomando $Q(a+h, b, f(a+h, b))$, então, ligando os pontos P e Q obtemos uma reta secante à curva γ passando por estes pontos.

Assim,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h},$$

corresponde à inclinação da reta tangente à curva γ no ponto P.

Analogamente tem-se o mesmo significado geométrico para $\frac{\partial f}{\partial y}(P)$.

DERIVADAS DE ORDEM SUPERIOR

Def: Seja $w = f(x,y)$ uma função de duas variáveis reais. As derivadas segundas de w são definidas por:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right);$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \quad e \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),$$

se os respectivos limites existirem.

__Ex:__ $f(x,y) = x^2 + sen(x^2+y^2)$

Calcule as derivadas segundas.

__Solução:__

$(sen\,u)' = \cos u \cdot u'$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + sen(x^2+y^2)\right) =$$

$$= 2x + \cos(x^2+y^2)\cdot(2x)$$

$$= 2x + 2x\cos(x^2+y^2)$$

$$= 2x\left(1+\cos(x^2+y^2)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\Big[\underbrace{2x}_{u}\cdot\underbrace{(1+\cos(x^2+y^2))}_{v}\Big]$$

$(u.v)' = u.v' + u'.v$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2x\cdot\left(0 - sen(x^2+y^2).2x\right) + $$
$$+ 2.\left(1+\cos(x^2+y^2)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -4x\,sen(x^2+y^2) + 2\left(1+\cos(x^2+y^2)\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = ?$$

Note que:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + \operatorname{sen}(x^2+y^2)\right) =$$

$$= 0 + \cos(x^2+y^2) \cdot 2y$$

$$= 2y \cdot \cos(x^2+y^2).$$

Assim:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2y \cdot \cos(x^2+y^2)\right)$$

$$= 2y \cdot \left(-\operatorname{sen}(x^2+y^2) \cdot 2x\right)$$

$$= -4xy \cdot \operatorname{sen}(x^2+y^2)$$

- $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = ?$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(2x \cdot \left(1 + \cos(x^2+y^2)\right)\right)$$

$$= 2x \cdot \left(0 - \operatorname{sen}(x^2+y^2) \cdot 2y\right)$$

$$= -4xy \cdot \operatorname{sen}(x^2+y^2)$$

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = ?$ (exercício)

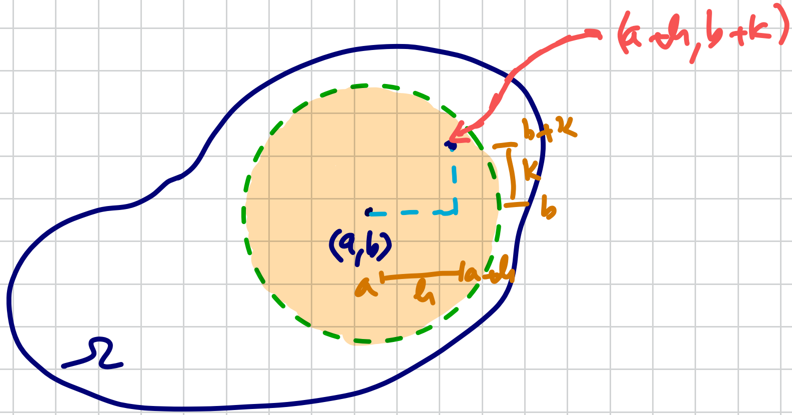
Obs.: Repare que, no exemplo acima, as derivadas MISTAS $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ deram o mesmo resultado, e isso não é uma coincidência, trata-se de uma propriedade, conforme o teorema a seguir.

TEOREMA DE SCHWARZ. Seja $z = f(x,y)$ uma função contínua de duas variáveis reais com as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ contínuas em um ponto $(a,b) \in int(\Omega)$. Então

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b).$$

DEMONSTRAÇÃO: Seja f nas hipóteses do teorema. Seja $\delta > 0$ tal que $B_\delta(a,b) \subset \Omega$.

Dados $h, k \in \mathbb{R}$ tais que $(a+h, b+k) \in B_\delta(a,b)$.



Defina $g(x) = f(x, b+k) - f(x, b)$; definida no intervalo $(a, a+h)$.

Então, g é contínua e derivável, por hipótese.

Disso, estamos nas hipóteses do T.V.M.$^{(*)}$

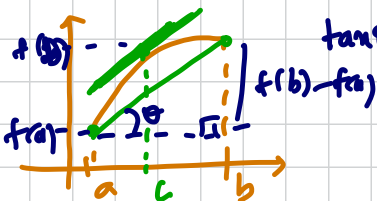
Então, $\exists\, c_0$ entre a e $a+h$, tal que

$$g'(c_0) = \frac{g(a+h) - g(a)}{\cancel{a} + h - \cancel{a}}$$

$$\Rightarrow g(a+h) - g(a) = g'(c_0) \cdot h; \quad \text{onde:}$$

(*) T.V.M. Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b). Então, $\exists\, c$ entre a e b tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



$$\tan\theta = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$g(x) = f(x, b+k) - f(x,b)$$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, b+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,b)$$

$$\Rightarrow g'(c_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(c_0, b+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(c_0, b)$$

Ou seja:

$$(*) \quad \boxed{g(a+h) - g(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(c_0, b+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(c_0, b)\right) \cdot h}$$

Define $u(y) = \frac{\partial}{\partial x} f(c_0, y)$, onde y está entre b e $b+k$.

$u(y)$ é cont. e derivável no intervalo de b a $b+k$. Então, novamente pelo T.V.M, segue que $\exists \, d_0$ entre b e $b+k$ tal que

$$u(b+k) - u(b) = u'(d_0) \cdot (\cancel{b} + k - \cancel{b})$$

$$\Rightarrow u(b+k) - u(b) = k \cdot u'(d_0);$$

onde $$u'(d_0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} f(c_0, y)\right)\Bigg|_{y=d_0}$$

$$\Rightarrow \quad u'(d_0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(f(c_0, d_0)\right)\right) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(c_0, d_0).$$

Assim:

$$\boxed{u(b+k) - u(b) = k \cdot \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(c_0, d_0)}$$

De (*), vem:

$$g(a+h) - g(a) = \Big(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(c_0, b+k)}_{u(b+k)} - \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(c_0, b)}_{u(b)}\Big) \cdot h =$$

$$= (u(b+k) - u(b)) \cdot h$$

$$= k \cdot \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(c_0, d_0) \cdot h$$

$$\Rightarrow \boxed{g(a+h) - g(a) = h \cdot k \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(c_0, d_0)} \quad (**)$$

Ainda, tem-se que:

$g(x) = f(x, b+k) - f(x, b)$; e então:

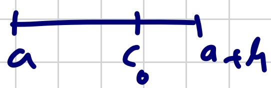
• $g(a+h) = f(a+h, b+k) - f(a+h, b)$

• $g(a) = f(a, b+k) - f(a,b)$.

Substituindo em (**), vem:

$$f(a+h, b+k) - f(a+h, b) - f(a, b+k) + f(a,b) =$$
$$= h \cdot k \cdot \frac{\partial^2 f(c_0, d_0)}{\partial y \partial x}.$$

Como c_0 está entre a e $a+h$,



então, $\exists\, \theta_1 \in [0,1]$ tal que

$$c_0 = a + \theta_1 . h.$$

Do mesmo modo, como d_0 está entre b e $b+k$, segue que $\exists\, \theta_2 \in [0,1]$ tal que

$$d_0 = b + \theta_2 . k.$$

Assim, temos:

$$f(a+h, b+k) - f(a+h, b) - f(a, b+k) + f(a,b) =$$

$$= h \cdot k \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a+\theta_1 h, b+\theta_2 k)$$

Dividindo por $k \neq 0$, obtemos:

$$\frac{f(a+h, b+k) - f(a+h, b)}{k} - \frac{f(a, b+k) - f(a,b)}{k} =$$

$$= h \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a+\theta_1 h, b+\theta_2 k)$$

Tomando o limite com $k \to 0$, obtemos:

$$\lim_{k\to 0} \frac{f(a+h, b+k) - f(a+h, b)}{k} - \lim_{k \to 0} \frac{f(a, b+k) - f(a,b)}{k}$$

$$= \lim_{k \to 0} h \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a+\theta_1 h, b+\theta_2 k)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(a+h, b) - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = h \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a+\theta_1 h, b)$$

Dividindo por $h \neq 0$, e passando o limite com $h \to 0$, vamos obter:

$$\underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(a+h,b) - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)}{h}}_{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\right)} = \lim_{h \to 0} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a+\underbrace{\theta_1 h}_{\downarrow 0}, b)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) \qquad \square$$

Obs.: NOTAÇÃO: podemos usar as seguintes notações para derivação parcial:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = D_x f = f_x = f_1$$

SIGNIFICA DERIVADA NA 1ª VARIÁVEL.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = D_y f = f_y = f_2$$

significa derivada na 2ª variável

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = D_{xx} f = f_{xx}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = D_{yy} f = f_{yy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx} \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}$$