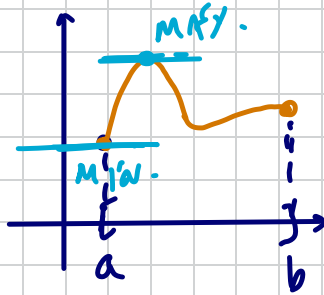


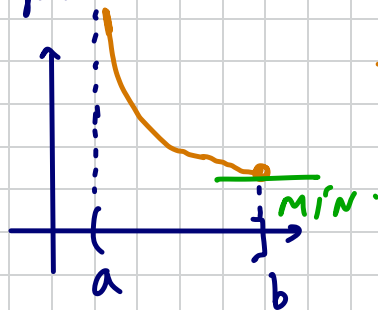
Continuando o estudo de funções contínuas, no cálculo, tem-se o seguinte resultado:

TEOREMA DE WEIERSTRASS (PARA FUNÇÕES DE $X(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$)

Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ for contínua, então ela assume valores máximos e mínimos em $[a, b]$.

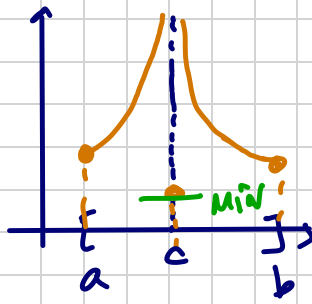


obs(a) O intervalo deve ser fechado, pois senão, um dos valores pode não ocorrer.



f é cont. em $(a, b]$, mas só assume um mín.

(b) f deve ser também contínua; pois se não o for pode não existir máx ou mín. :



f assume um mín. em $[a, b]$, mas não tem MAX.

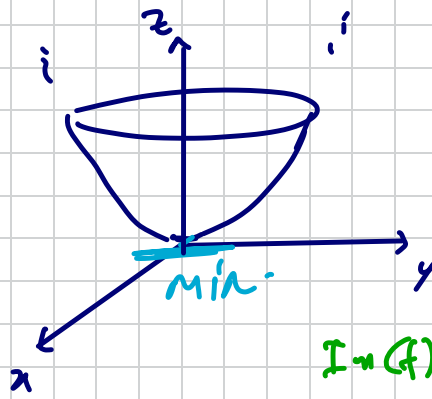
Este teorema ainda vale para funções

$f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ com a seguinte adaptação.

TEOREMA DE WEIERSTRASS: Toda função $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ escalar contínua em um compacto $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ assume valores MÁXIMO e MÍNIMO em Ω .

A demonstração desse resultado requer Análise Real, e, portanto, fica omitida.

Ex^o $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$,
 é contínua. Porém, em \mathbb{R}^2 esta
 função não assume simultaneamente
 máx. e mín., pois \mathbb{R}^2 não é
 compacto

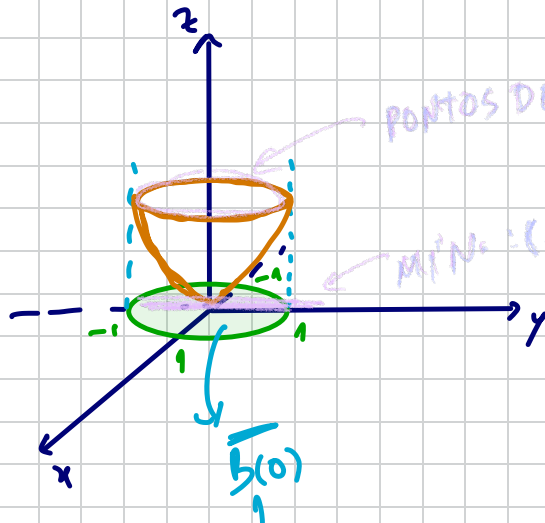


min. (0,0)

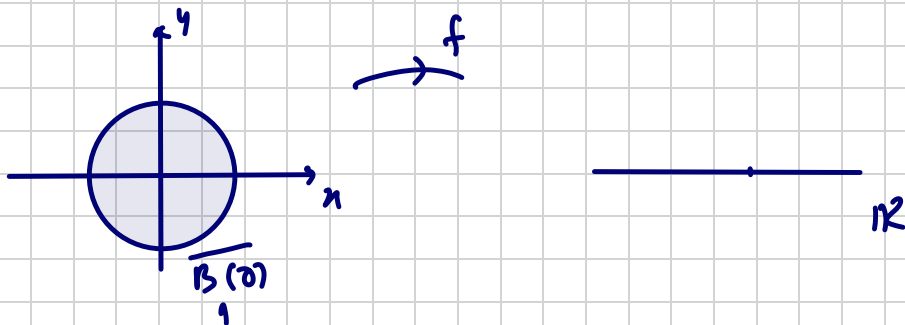
$I_n(f) = [0, +\infty)$
 cont.

Seja $f : \underbrace{\overline{B(0)_1}}_1 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + y^2$
 BOLA FECHADA
 ↑
 COMPACTO DO \mathbb{R}^2

Logo, pelo T. de Weierstrass, f assume valores máx. e min. em $\overline{B(0)_1}$.



$$\frac{x^2 + y^2}{2} = 1$$



DERIVADAS:

No que segue estudaremos o conceito de derivada. Vamos iniciar o estudo para funções vetoriais a uma variável real, ou seja: $\vec{f}: (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Def. 1 Seja $\vec{f}: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^m$ função vetorial e seja $t_0 \in (a, b)$. Definimos a derivada de \vec{f} no ponto t_0 como o limite:

$$\vec{f}'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\vec{f}(t) - \vec{f}(t_0)}{t - t_0},$$

se este limite existir.

Escrevendo $t - t_0 = h$, temos $t = t_0 + h$.

Assim, $h \rightarrow 0$; e logo, podemos escrever:

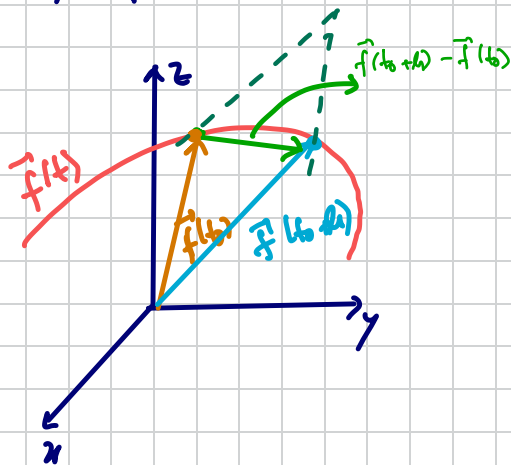
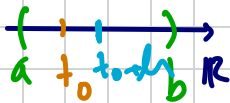
$$\vec{f}'(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{f}(t_0 + h) - \vec{f}(t_0)}{h}$$

SIGNIFICADO GEOMÉTRICO PARA $\vec{f}'(t_0)$:

Seja $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ derivável em $t_0 \in (a, b)$.

Seja $h \in \mathbb{R}$ tal que $t_0 + h \in (a, b)$. Obtemos os

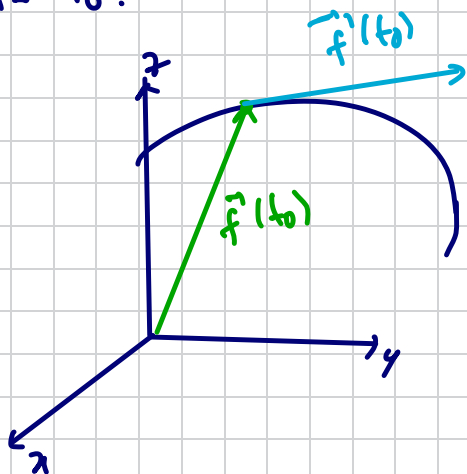
vetores $\vec{f}(t_0 + h)$ e $\vec{f}(t_0)$



A diferença $\vec{f}(t_0 + h) - \vec{f}(t_0)$ será a diagonal menor do paralelogramo formado pelos dois vetores.

Quando $h \rightarrow 0$, significa que $\vec{f}(t_0 + h)$ se

aproxima de $\vec{f}'(t_0)$, e entre o vetor "recorte" e o vetor tangente à curva no ponto t_0 .



Outra seja;

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{f}(t_0+h) - \vec{f}(t_0)}{h}$$

fornece o vetor tangente ao gráfico de \vec{f} no ponto t_0

Como calcular a derivada de uma função vetorial?

Def: Dizemos que $\vec{f}: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}^m$ é derivável se for derivável em todos os pontos do intervalo (a,b) . Neste caso, define-se a função derivada $\vec{f}' : (a,b) \rightarrow \mathbb{R}^m$ por

$$\vec{f}'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{f}(t+h) - \vec{f}(t)}{h}$$

PROP.: Seja $\vec{f}: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função derivável

dada por $\vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_m(t))$.

Então:

$$\vec{f}'(t) = (f_1'(t), f_2'(t), \dots, f_m'(t)).$$

DEMONSTR.: De fato:

$$\vec{f}'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{f}(t+h) - \vec{f}(t)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot (\vec{f}(t+h) - \vec{f}(t)) =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot (f_1(t+h) - f_1(t), \dots, f_m(t+h) - f_m(t))$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f_1(t+h) - f_1(t)}{h}, \dots, \frac{f_m(t+h) - f_m(t)}{h} \right)$$

$$= \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_1(t+h) - f_1(t)}{h}, \dots, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_m(t+h) - f_m(t)}{h} \right)$$

$$= (f_1'(t), f_2'(t), \dots, f_m'(t)).$$

□

Ex. Dada $\vec{f}(t) = (t^3 + t^2, \ln(3t-2), \sqrt{t^2-t})$,
calcule $\vec{f}'(t)$.

Solução: Note que:

$$\bullet f_1(t) = t^3 + t^2 \Rightarrow f_1'(t) = 3t^2 + 2t$$

$$\bullet f_2(t) = \ln(3t-2) \Rightarrow f_2'(t) = \frac{(3t-2)'}{3t-2} = \frac{3}{3t-2}$$

$$\bullet f_3(t) = (t^2-t)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f_3'(t) = \frac{1}{2} (t^2-t)^{-\frac{1}{2}} (2t-1)$$
$$= \frac{2t-1}{2\sqrt{t^2-t}}$$

Assim, obtemos:

$$\vec{f}'(t) = \left(3t^2 + 2t, \frac{3}{3t-2}, \frac{2t-1}{2\sqrt{t^2-t}} \right).$$

Do estudo de ALGA; viu-se o conceito de
vetor de um vetor $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, que é
o vetor unitário no mesmo sentido de \vec{u} , e é

Dado por:

$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \text{ onde}$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}.$$

Dessa, dada $\vec{f}(t)$ uma função vetorial,
o vetor tangente unitário de \vec{f} num ponto t_0
será dado por

$$\vec{f}'_1(t_0) = \frac{\vec{f}'(t_0)}{\|\vec{f}'(t_0)\|}.$$

Ex: Obtenha o vetor tangente unitário
ao gráfico de $\vec{f}(t) = (t^3, t^2+1, 2t)$ no
ponto onde $t_0 = 1$.

Solução: A função derivada é dada por:

$$\vec{f}'(t) = (3t^2, 2t, 2)$$

$$\vec{f}'(1) = (3 \cdot (1)^2, 2 \cdot 1, 2) = (3, 2, 2).$$

VETOR TANGENTE
A GRÁFICO
EM $\vec{f}(1)$.

$$\begin{aligned} \text{Como } \|\vec{f}'(1)\| &= \sqrt{(3)^2 + (2)^2 + (2)^2} \\ &= \sqrt{9 + 4 + 4} = \sqrt{17}. \end{aligned}$$

Então, o vetor tangente unitário ao gráfico de \vec{f} em $t=1$ será dada por:

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 &= \frac{\vec{f}'(1)}{\|\vec{f}'(1)\|} = \frac{1}{\|\vec{f}'(1)\|} \cdot \vec{f}'(1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot (3, 2, 2) = \left(\frac{3}{\sqrt{17}}, \frac{2}{\sqrt{17}}, \frac{2}{\sqrt{17}} \right) \end{aligned}$$

PROPOSIÇÃO: Sejam $\vec{f}, \vec{g}: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ funções

deriváveis. Então, valem as propriedades:

$$(i) (\vec{f} + \vec{g})' = \vec{f}' + \vec{g}'$$

$$(ii) (\vec{f} \cdot \vec{g})' = \vec{f} \cdot \vec{g}' + \vec{f}' \cdot \vec{g} \quad \left(\begin{array}{l} \text{o produto e'} \\ \text{o produto} \\ \text{escalar} \end{array} \right)$$

$$(iii) (\vec{f} \times \vec{g})' = \vec{f} \times \vec{g}' + \vec{f}' \times \vec{g}.$$

obs.: Os itens (i) e (ii) valem para dimensões mais altas. O item (iii) só para o caso \mathbb{R}^3 .

DEMONSTRA: Exeremos a prova de (iii)

Sejam $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$ e $\vec{g} = (g_1, g_2, g_3)$
↳ $f_1(t)$, etc...

Axim, teremos:

$$\vec{f} \times \vec{g} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_2 g_3 - f_3 g_2 & f_3 g_1 - f_1 g_3 & f_1 g_2 - f_2 g_1 \end{vmatrix}$$

$$= (f_2 g_3 - f_3 g_2) \vec{i} + (f_3 g_1 - f_1 g_3) \vec{j} + (f_1 g_2 - f_2 g_1) \vec{k}$$

Axim, derivando, vamos obter:

$$\underline{(\vec{f} \times \vec{g})'} = (f_2 g_3' + f_2' g_3 - f_3 g_2' - f_3' g_2),$$

$$f_3 g_1' + f_3' g_1 - f_1 g_3' - f_1' g_3,$$

$$f_1 g_2' + f_1' g_2 - f_2 g_1' - f_2' g_1) =$$

$$= (f_2 g_3' - f_3 g_2', f_3 g_1' - f_1 g_3', f_1 g_2' - f_2 g_1') +$$

$$+ (f_2' g_3 - f_3' g_2, f_3' g_1 - f_1' g_3, f_1' g_2 - f_2' g_1)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{x} & \vec{y} & \vec{z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1' & g_2' & g_3' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{x} & \vec{y} & \vec{z} \\ f_1' & f_2' & f_3' \\ g_1 & g_2 & g_3 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{f} \times \vec{g}' + \vec{f}' \times \vec{g}$$

□

DERIVADAS PARCIAIS

Para funções escalares $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ temos a seguinte conceito:

Def: Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^m$. Definimos a derivada parcial de f em relação à variável x_i , por:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \dots, x_m) - f(x_1, \dots, x_m)}{h}$$

se este limite existir.

Por exemplo, para $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} \quad ; \quad e$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} .$$

o símbolo ∂ é chamado de D-ROND.

Uma derivação parcial funciona da mesma
modo que uma derivação a uma variável,
mantendo as demais variáveis como constantes.

Ex.: $f(x, y) = \sin(x^2 y) - x^3$

Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Solução:

$$\begin{aligned} \bullet \frac{\partial f}{\partial x} &= \cos(x^2 y) \cdot 2x \cdot y - 3x^2 \\ &= 2xy \cos(x^2 y) - 3x^2. \end{aligned}$$

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial y} = \cos(x^2 y) \cdot x^2 - 0 = x^2 \cos(x^2 y).$$

