CÁLCULO 3, TURMA T2

10/04/26 — AULA 08

PROPOSIÇÃO: Sejam $f, g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funções escalares, com $a \in \Omega'$ (ou seja, $a \in \mathbb{R}^n$ é um ponto de acumulação do conj. Ω) se

$$\lim_{x \to a} f(x) = l_1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a} g(x) = l_2, \text{ então:}$$

(i) $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) \pm g(x) = l_1 \pm l_2 = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$

(ii) $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = l_1 . l_2 = \lim_{x \to a} f(x) . \lim_{x \to a} g(x)$

(iii) $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$;

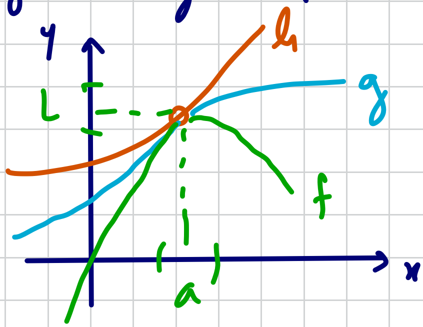
desde que $l_2 \neq 0$.

As provas são similares às do cálculo 1, e, por essa razão, serão omitidas.

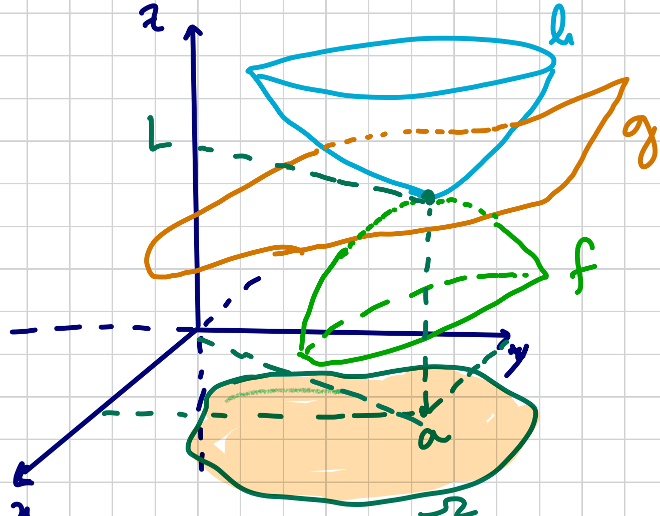
TEOREMA DO SANDUÍCHE: Sejam $f, g, h : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ funções escalares, com $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, $\forall x \in \Omega$. $a \in \Omega'$. Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a} h(x) = L$,

então $\lim_{x \to a} g(x) = L$

Obs: No cálculo 1, temos esse resultado com o seguinte significado geométrico:



Significado geométrico para funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$.



DEMONSTRAÇÃO: Sejam $f, g, h : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ tais que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, $\forall x \in \Omega$. Seja $a \in \Omega'$.

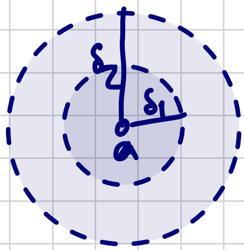
Dado $\varepsilon > 0$.

Como $\lim_{x \to a} f(x) = L$, então $\exists\, \delta_1 > 0$ tal que,

$$\forall x \in \Omega : \quad 0 < d(x,a) < \delta_1 \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon. \quad (*)$$

Como $\lim_{x \to a} h(x) = L$, então $\exists\, \delta_2 > 0$ tal que,

$$\forall x \in \Omega : \quad 0 < d(x,a) < \delta_2 \Longrightarrow |h(x) - L| < \varepsilon \quad (**)$$



Tome $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$

Assim, $\forall x \in \Omega$ tal que $0 < d(x,a) < \delta$, valem $(*)$ e $(**)$; ou seja,

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{e} \quad |h(x) - L| < \varepsilon.$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$-\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon \qquad\qquad -\varepsilon < h(x) - L < \varepsilon$$

(pois $|w| \leq a \iff -a \leq w \leq a$)

Como por hipótese, $\forall x \in \Omega$ tem-se

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x),$$

subtraindo L em toda a cadeia de desigualdades, obtemos:

$$-\varepsilon < f(x) - L \leq g(x) - L \leq h(x) - L < \varepsilon;$$

ou seja, segue que

$$-\varepsilon < g(x) - L < \varepsilon,$$

sempre que $0 < d(x,a) < \delta$, isto é,

$$|g(x) - L| < \varepsilon,$$

sempre que $0 < d(x,a) < \delta$.

Ou seja, mostramos que $\lim_{x \to a} g(x) = L$. $\square$

Vejamos alguns exemplos.

L3

7. Sabendo que

$$1 - \frac{x^2y^2}{3} < \frac{\arctan xy}{xy} < 1,$$

o que pode-se dizer sobre

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\arctan xy}{xy} \text{ ? Justifique.}$$

Solução:

Note que:

- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 1 - \dfrac{x^2y^2}{3} = 1 - \dfrac{0}{3} = 1.$

- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 1 = 1.$

Assim, obtemos:

$$\underbrace{1 - \frac{x^2y^2}{3}}_{\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 1} < \frac{\arctan xy}{xy} < \underbrace{1}_{\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 1}.$$

$\Downarrow$ T. do Sanduíche

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\arctan xy}{xy} = 1$$

$$\boxed{\text{Obs.: } f(x) < g(x) \Longrightarrow \lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x)}$$

L3

9. Calcule, se existir, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\cos\frac{1}{y}$, lembrando que $\underbrace{|\cos\alpha| \leq 1}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x \cdot \cos\frac{1}{y} = ?$$

Note que:

$$0 \leq |f(x,y)| = \left|x \cdot \cos\frac{1}{y}\right| = |x| \cdot \underbrace{\left|\cos\frac{1}{y}\right|}_{\leq 1.}$$

$\Rightarrow$

$$0 \leq |f(x,y)| \leq |x| \cdot 1 = |x|$$

Como $\lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 = 0$, e

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |x| = |0| = 0$, então:

$$\underbrace{0}_{\xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0} \leq |f(x,y)| \leq \underbrace{|x|}_{\xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0}$$

$\Downarrow$ T. do sanduíche

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| = 0$$

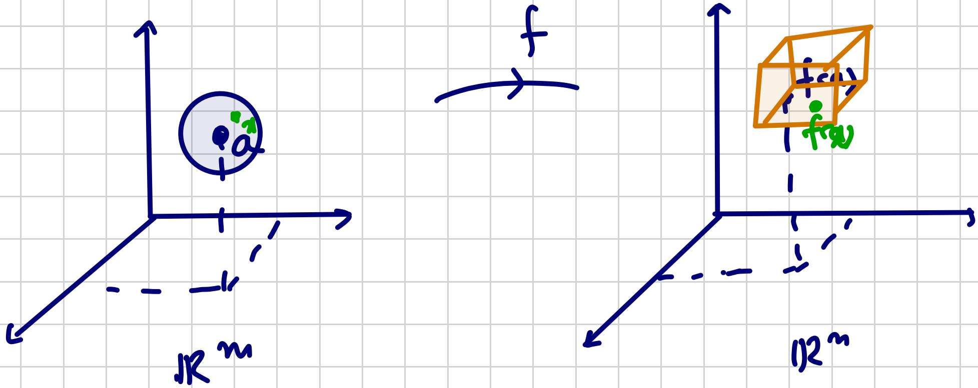
Logo, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, ou seja,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x \cdot \cos\frac{1}{y} = 0.$$

FUNÇÕES CONTÍNUAS:

Def.: Dizemos que uma função $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é contínua em um ponto $a \in \Omega \cap \Omega'$ se, e somente se, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que, $\forall x \in \Omega$:

$$\underbrace{d(x,a)}_{\mathbb{R}^m} < \delta \implies \underbrace{d(f(x), f(a))}_{\mathbb{R}^n} < \varepsilon$$



Como $a \in \Omega'$ e $a \in \Omega$, a definição acima de continuidade no ponto a pode ser dada em termos de limites. Assim; $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é contínua em $a \in \Omega$ se, e somente se,

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Vejamos um exemplo de cálculo:

L3

13. Nos exercícios a seguir verifique se f é contínua na origem.

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

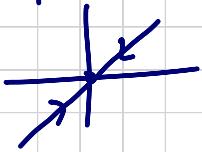
(b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(b) Precisamos verificar se $\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = f(0,0)$

1º: $\exists f(0,0) = 0$.

2º: ¿$\exists \lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y)$?

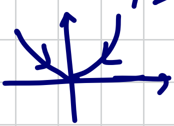
- $$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \frac{x^2\cdot y}{x^4+y^2} =$$



$$= \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \frac{x^2\cdot x}{x^4+x^2} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \frac{x^{\cancel{3}}}{\cancel{x^2}(x^2+1)}$$

$$= \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \frac{x}{x^2+1} = \frac{0}{0+1} = \frac{0}{1} = 0 \;//$$

- $$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2}} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} =$$



$$= \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2}} \frac{x^2\cdot x^2}{x^4+x^4} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2}} \frac{\cancel{x^4}}{2\cancel{x^4}} = \frac{1}{2} \;//$$

Assim, como por 2 caminhos diferentes resultou em limites diferentes, segue que $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Portanto, f não é contínua em $(0,0)$.

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{|x|+|y|}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(i) $\exists f(0,0) = 0$

(ii) $\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?

CONJECTURA: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{|x|+|y|} = 0$.

Note que:

$$0 \leq |f(x,y)| = \left| \frac{xy}{|x|+|y|} \right| = \frac{|xy|}{|x|+|y|} =$$

$$= \frac{|x| \cdot |y|}{|x|+|y|}$$

Note que: $|x| \leq |x| + |y|$. Assim:

$$0 \leq |f(x,y)| = \frac{|x| \cdot |y|}{|x|+|y|} \leq \frac{\cancel{(|x|+|y|)} \cdot |y|}{\cancel{|x|+|y|}} = |y|$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{0}_{\substack{\downarrow \\ 0}} \leq |f(x,y)| \leq \underbrace{|y|}_{\substack{\downarrow \\ 0}}$$

$(x,y)\to(0,0)$ $\qquad$ $(x,y)\to(0,0)$

$\Downarrow$ t. do sanduíche

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

Disso, conclui-se que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

Portanto, f é contínua na origem.

Def. 1 Dizemos que uma função $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é contínua em Ω se ela for contínua em todos os pontos do seu domínio Ω.

Prop.: Sejam $f, g: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ (funções escalares) contínuas. Então as funções $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ e f/g também são contínuas. A última, onde $g(x) \neq 0$.

Prop. A composição de funções contínuas resulta em uma função contínua. Mais precisamente, sejam $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ contínua em $a \in A$, $g: B \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ contínua em $b \in B$, com $f(A) \subset B$, então, $g \circ f: A \to \mathbb{R}^p$ também é contínua em a.

A demonstração é similar a feito no cálculo 1

$\square$
