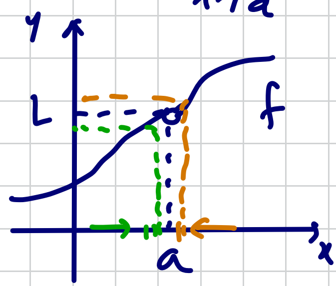
CÁLCULO 3, TURMA T2

08/04/26 - AULA 07

Na aula passada iniciamos o estudo de limites de funções de várias variáveis reais.

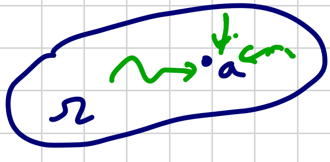
No cálculo 1 estudamos o conceito de limites laterais. Na ocasião, vimos que; dada $f: \Omega \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\exists \lim_{x \to a} f(x) \iff \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x).$$



No que segue, vamos explorar um resultado que seja ainda válido para funções de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$.

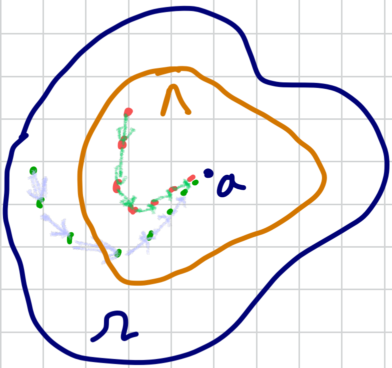
Por exemplo, para funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$, não tem sentido verificar pela "esquerda" ou pela "direita", pois o domínio agora será uma região do $\mathbb{R}^2$, e não mais um intervalo.



$(x, y) \to a = (a_1, a_2)$ por diferentes caminhos

PROPOSIÇÃO: Sejam $f:\Omega\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ uma função escalar, $\Lambda\subset\Omega$ um conjunto não vazio de Ω, $a\in\Lambda'\cap\Omega'$ (ou seja, $a\in\mathbb{R}^m$ é um ponto de acumulação dos conjuntos Λ e Ω). Então,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{\substack{x\to a\\ x\in\Lambda}} f(x).$$



DEMONSTR.: Sejam $\Lambda\subset\Omega$ e $f:\Omega\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$; a ponto de acumulação de Λ e Ω.

Seja $l=\lim_{x\to a} f(x)$. Então, dado $\varepsilon>0$, $\exists\,\delta>0$ tal que, $\forall x\in\Omega$: $0<d(x,a)<\delta \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$.

Então, em particular, para $x\in\Lambda$ tal que

$$0<d(x,a)<\delta,$$

segue também que

$$|f(x)-l|<\varepsilon.$$

Ou seja, mostramos que

$$\lim_{\substack{x\to a \\ x\in \Lambda}} f(x) = \ell = \lim_{x\to a} f(x).$$

$\square$

Uma consequência do resultado é o seguinte:

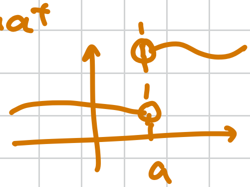
<u>COROLÁRIO</u>: Sejam $f:\Omega\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ uma função, $A, B\subset\Omega$ subconjuntos não vazios de Ω; $a\in A'\cap B'\cap\Omega'$ (ou seja, $a\in\mathbb{R}^m$ é um ponto de acumulação dos conjuntos A, B e Ω).

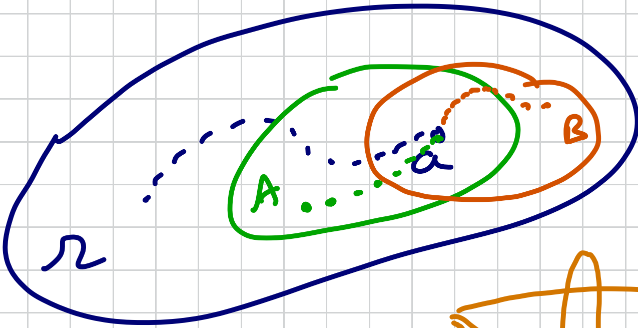
Então, se

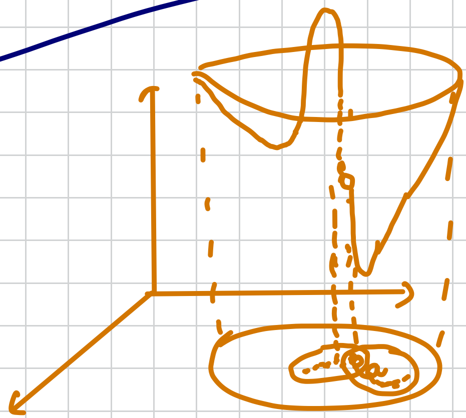
$$\lim_{\substack{x\to a \\ x\in A}} f(x) \neq \lim_{\substack{x\to a \\ x\in B}} f(x) \Rightarrow \nexists \lim_{x\to a} f(x).$$

<u>Obs</u>: No <u>cálculo 1</u>, esse resultado se traduz em:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x) \Rightarrow \nexists \lim_{x\to a} f(x).$$







<u>DEMONSTR:</u> Suponha que $\displaystyle\lim_{\substack{x\to a \\ x\in A}} f(x) \neq \lim_{\substack{x\to a \\ x\in B}} f(x)$.

Por absurdo, suponha que $\displaystyle\exists \lim_{x\to a} f(x) = l$.

Então, pela proposição anterior; como $A\subset\Omega$ e $a\in A'\cap\Omega'$, então

$$l = \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{\substack{x\to a \\ x\in A}} f(x).$$

Do mesmo modo, como $B \subset \Omega$ e $a \in B' \cap \Omega'$, então

$$\ell = \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in B}} f(x).$$

$$\Rightarrow \ell = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in B}} f(x),$$ mas

hipótese, eles são diferentes! Absurdo!

Portanto, $\nexists \lim_{x \to a} f(x)$.

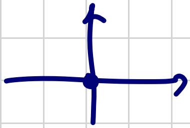
$\square$

<u>obs</u>: $\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x)$; dizemos que estamos tomando o caminho sendo o conj. A.

Vejamos alguns exemplos de aplicação:

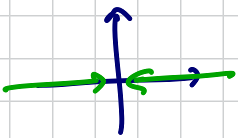
Ex.: Verifique se existem os limites a seguir:

(a) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^3+y^3} = ?$$



Solução: precisamos testar caminhos que passem pela origem $(0,0)$.

- $A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$.

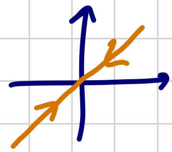


Assim, temos:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in A_1}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=0}} \frac{x^2y}{x^3+y^3} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=0}} \frac{x^2\cdot 0}{x^3+0^3}$$

$$= \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=0}} \frac{0}{x^3} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=0}} 0 = 0$$

- $A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\}$.



Neste caso, teremos:

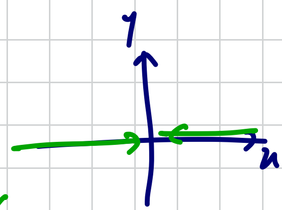
$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in A_2}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=x}} \frac{x^2 y}{x^3+y^3} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=x}} \frac{x^2 \cdot x}{x^3+x^3}$$

$$= \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=x}} \frac{\cancel{x^3}}{2\cancel{x^3}} = \frac{1}{2}.$$

$$\Longrightarrow \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=0}} f(x,y) \neq \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=x}} f(x,y) \quad ; \text{ logo,}$$

$$\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$

(b) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$



- $A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$.
  ↳ eixo x.

Neste caso, teremos:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+0^2}} =$$

$$= \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \frac{x^2}{\sqrt{x^2}} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \frac{x^2}{|x|} =$$

$$= \begin{cases} \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \dfrac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}}, & \text{se } x \geq 0 \\ \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \dfrac{x^{\cancel{2}}}{-\cancel{x}}, & \text{se } x < 0 \end{cases} = 0 \,//$$

- $A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\}$.

Neste caso:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+x^2}}$$

$$= \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \frac{x^2}{\sqrt{2}\cdot|x|} = \begin{cases} \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \dfrac{\cancel{x^2}}{\sqrt{2}\,\cancel{x}}, & \text{se } x \geq 0 \\ \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \dfrac{\cancel{x^2}}{-\sqrt{2}\,\cancel{x}}, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$= 0.$

Por dois caminhos diferentes resultou no mesmo valor (0). Então, conjecturamos que o limite existe e seja zero. De fato, provaremos a afirmação:

AF: $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$:

Dado $\varepsilon > 0$, precisamos encontrar $\delta > 0$, tal que, $\forall (x,y) \in D(f)$ tal que

$$0 < d_2((x,y);(0,0)) < \delta \,,$$

implique em $|f(x,y) - 0| < \varepsilon$.

Note que $0 < d_2((x,y),(0,0)) < \delta$

$$\Updownarrow$$

$$0 < \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} < \delta$$

$$\Updownarrow$$

$$0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta.$$

Avaliando $|f(x,y)-0|$, temos:

$$|f(x,y)-0| = |f(x,y)| = \left|\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

e como

$$x^2 \leq x^2+y^2$$

, e então:

$$|f(x,y)-0| = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \times \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \frac{\cancel{(x^2+y^2)}\cdot\sqrt{x^2+y^2}}{\cancel{x^2+y^2}} = \underline{\sqrt{x^2+y^2}} < \delta = \varepsilon$$

Ou seja,

$$|f(x,y)-0| < \delta = \varepsilon.$$

i.e., basta tomar $\delta = \varepsilon$.

Isso mostra que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

LISTA 03

JÁ ESTAMOS AFIRMANDO QUE EXISTE.

5. Em cada exercício a seguir, mostre que existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

(a) $f(x,y) = \dfrac{x^2y + xy^2}{x^2+y^2}$ (b) $f(x,y) = \dfrac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ (c) $f(x,y) = \dfrac{x^2+2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(a) AF.: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2} = 0$

Dado $\varepsilon > 0$, precisamos achar $\delta > 0$, tal que,

$\forall (x,y) \in D(f)$: $0 < d_2((x,y),(0,0)) < \delta$, i.e.,

$$\boxed{0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta}, \quad (*)$$

implique em $|f(x,y) - 0| < \varepsilon$.

Analisando $|f(x,y) - 0|$, temos:

$$|f(x,y) - 0| = \left|\frac{x^2y + xy^2}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{|x^2y| + |xy^2|}{|x^2+y^2|}$$

$|a+b| \leq |a| + |b|$

$$= \frac{x^2|y| + |x| \cdot y^2}{x^2+y^2}$$

Note que:

$$|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}$$

$$|y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}$$; Assim:

$$|f(x,y)-0| \leq \frac{x^2\overbrace{|y|}^{\leq\sqrt{x^2+y^2}} + |x|.y^2}{x^2+y^2} \leq$$

$$\leq \frac{x^2.\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^2+y^2}.y^2}{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+y^2}\,\cancel{(x^2+y^2)}}{\cancel{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2} < \delta := \varepsilon$$

por (*)

Ou seja, basta tomar $\delta = \varepsilon$.

Isso mostra que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$

Voltando para o estudo de funções vetoriais $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^m$ (ou seja de uma variável real), vimos na aula passada uma def de limite:

$$\lim_{t \to a} \vec{f}(t) = \vec{l} \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0, \text{ tal que, }$$

$$\forall t \in D(\vec{f}): \quad 0 < |t-a| < \delta \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad d_2(\vec{f}(t), \vec{l}) < \varepsilon.$$

Frente a este conceito tem-se o seguinte resultado:

<u>PROPOSIÇÃO:</u> Seja $\vec{f}: \Omega \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ função vetorial, $a \in \Omega'$. onde $\vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_m(t))$,

Então:

$$\lim_{t \to a} \vec{f}(t) = \left(\lim_{t \to a} f_1(t), \lim_{t \to a} f_2(t), \dots, \lim_{t \to a} f_m(t) \right)$$

(Ou seja, o cálculo do limite de uma função vetorial resume-se ao cálculo do limite de cada função coordenada).

Ex: Calcule o limite da função

$$\vec{f}(t) = \left(\frac{t^2-4}{t^3-8}, \frac{\sqrt{t}-\sqrt{2}}{t-2}, t \right)$$

quando $t \to 2$.

solução:

$$\lim_{t\to 2} \vec{f}(t) = \left(\lim_{t\to 2} \frac{t^2-4}{t^3-8}, \lim_{t\to 2} \frac{\sqrt{t}-\sqrt{2}}{t-2}, \lim_{t\to 2} t \right)$$

- $$\lim_{t\to 2} \frac{t^2-4}{t^3-8} = \lim_{t\to 2} \frac{(t+2)\cancel{(t-2)}}{\cancel{(t-2)}(t^2+2t+4)} =$$

$$\begin{array}{r|l} \cancel{t^3} - 8 & t-2 \\ \cline{2-2} -\cancel{t^3} + 2t^2 & t^2+2t+4 \\ \hline \cancel{2t^2} - 8 & \\ -\cancel{2t^2} + 4t & \\ \hline 4t - 8 & \\ -4t + 8 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$= \lim_{t\to 2} \frac{t+2}{t^2+2t+4}$$

$$= \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

- $$\lim_{t\to 2} \frac{\sqrt{t}-\sqrt{2}}{t-2} \cdot \frac{\sqrt{t}+\sqrt{2}}{\sqrt{t}+\sqrt{2}} = \lim_{t\to 2} \frac{\cancel{t-2}}{\cancel{(t-2)}(\sqrt{t}+\sqrt{2})}$$

$$= \lim_{t\to 2} \frac{1}{\sqrt{t}+\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

- $$\lim_{t\to 2} t = 2$$

Portanto, o limite será:

$$\lim_{t\to 2} \vec{f}(t) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, 2\right).$$

Obs: Por falta de tempo a demonstração da proposição foi omitida. No entanto, ela foi feita na respectiva aula da turma T3 (aula 07)