CÁLCULO 3, TURMA T2

06/04/26 – AULA 06

LIMITES DE FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS REAIS:

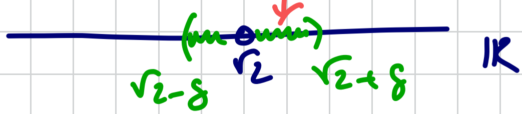
Def.: Seja $X \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto não vazio de $\mathbb{R}^m$. Dizemos que um ponto $a \in \mathbb{R}^m$ é um <u>ponto de acumulação</u> do conjunto se $\forall \delta > 0$, tem-se:

$$\left(B_\delta(a) \setminus \{a\} \right) \cap X \neq \emptyset.$$

O conjunto de todos os pontos de acumulação de um conj. X é chamado de <u>derivado de X</u>, e é denotado por X'.

Ex: $X = \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Note que $a = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. No entanto, $\sqrt{2}$ é um ponto de acumulação de $\mathbb{Q}$, pois dado $\delta > 0$, o intervalo $(\sqrt{2}-\delta, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \sqrt{2}+\delta)$, que é $B_\delta(\sqrt{2}) \setminus \{\sqrt{2}\}$ contém números racionais, pois $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$.

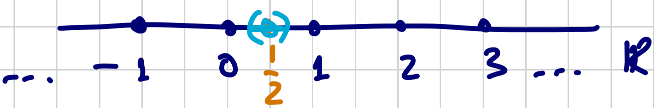
$\exists\, q \in \mathbb{Q}$ nesse intervalo.



Logo: $\left(B_\delta(\sqrt{2}) \setminus \{\sqrt{2}\} \right) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset.$

CONTRA-EXEMPLO: $X = \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$, $a = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ e também não é ponto de acumulação de $\mathbb{Z}$, pois, por exemplo:

$$\left(B_{\frac{1}{4}}\left(\tfrac{1}{2}\right) \setminus \left\{\tfrac{1}{2}\right\}\right) \cap \mathbb{Z} = \emptyset.$$



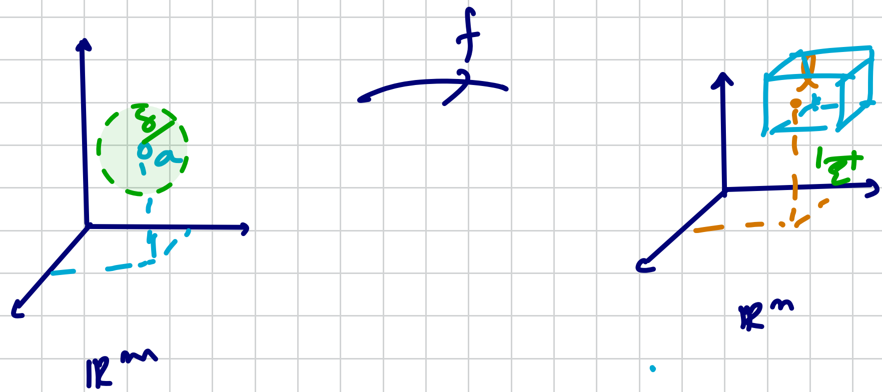
Frente a este conceito, podemos apresentar a definição geral de limite.

Def.: Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uma função, com $a \in \Omega'$ (i.e., $a \in \mathbb{R}^m$ é um ponto de acumulação do conj. Ω). Dizemos que $l \in \mathbb{R}^n$ é o limite de $f(x)$ quando x tende para a, e escrevemos

$\lim_{x \to a} f(x) = l$ se, e somente se,

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que, $\forall x \in \Omega$: $x \in B_\delta(a) \setminus \{a\} \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow f(x) \in B_\varepsilon(l).$$



FIXE $\varepsilon>0$. CONSTRÓI-SE $B_\varepsilon(\ell)$.

ENTÃO, VAI EXISTIR $\delta>0$ NO QUAL CONSTRÓI-SE

$B_\delta(a)\setminus\{a\}$.

EXISTINDO O LIMITE (APROXIMAÇÃO), ENTÃO,

QUALQUER x DENTRO DA BOLA PERFURADA $B_\delta(a)\setminus\{a\}$,

GARANTE QUE SUA IMAGEM $f(x)$ ESTARÁ NA BOLA $B_\varepsilon(\ell)$.

Vamos "adaptar" esta definição geral de limite para alguns casos:

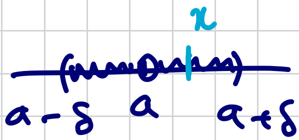
<u>CASO 1:</u> NO CÁLCULO 1: $f:\Omega\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. a um ponto de acumulação de Ω. Então:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\ell \overset{def.}{\iff} \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0 \text{ tal que } \forall x\in\Omega:$$

$$0<|x-a|<\delta \implies |f(x)-\ell|<\varepsilon.$$

Note que, neste caso;

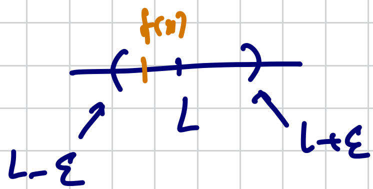
$$0<|x-a|<\delta \iff x \in B_\delta(a)\setminus\{a\}.$$

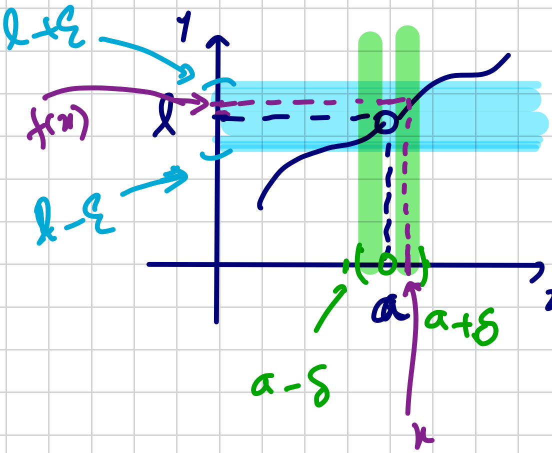


;

e :

$$|f(x)-\ell|<\varepsilon \iff f(x)\in B_\varepsilon(\ell)$$





CASO 2: $f: \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, onde $\mathbb{R}^3$ está equipado com a métrica euclidiana d_2 e $\mathbb{R}^2$ está equipado com a métrica da soma d_1.

Dado $a \in \Omega'$; $a = (a_1, a_2, a_3)$

$$x = (x_1, x_2, x_3)$$

Assim:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}^2 \quad ; \ \ell = (\ell_1, \ell_2)$$

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x))$$

$$\Big\Updownarrow \text{def}$$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que, $\forall x \in \Omega$:

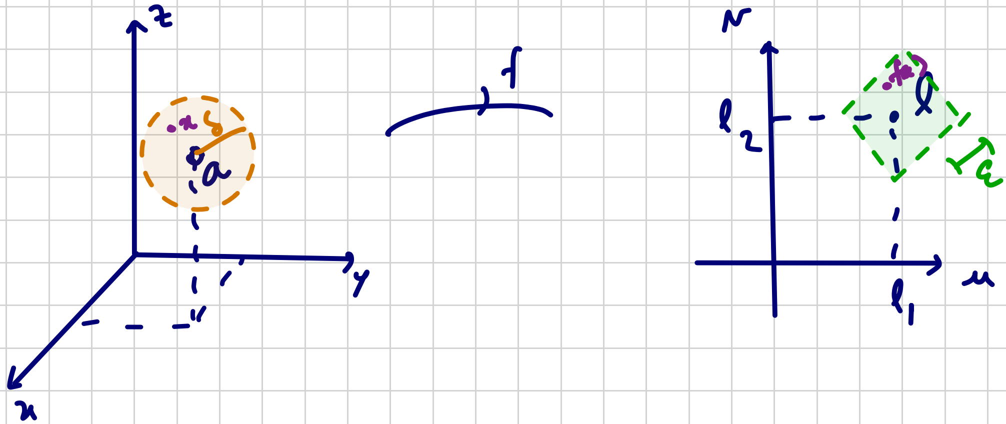
$$\underbrace{x \in B_\delta(a) \setminus \{a\}}_{0 < d_2(x,a) < \delta} \implies \underbrace{f(x) \in B_\varepsilon(\ell)}_{d_1(f(x),\ell) < \varepsilon}.$$

$$\Updownarrow$$

$$0 < \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2} < \delta$$

$$\Updownarrow$$

$$|f_1(x) - \ell_1| + |f_2(x) - \ell_2| < \varepsilon$$



CASO 3: função escalar: $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

$a = (a_1, a_2) \in \Omega'$. $\quad l \in \mathbb{R}$. $\quad f = f(x, y)$

Então:

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} f(x,y) = l \overset{\text{def.}}{\iff} \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tal que, } \forall x \in \Omega,$$

$$(x,y) \in B_\delta(a) \setminus \{a\} \Rightarrow f(x,y) \in B_\varepsilon(l).$$

onde:

- $(x,y) \in B_\delta(a) \setminus \{a\} \iff 0 < d_2((x,y),(a_1,a_2)) < \delta$

$$\Updownarrow$$

$$0 < \sqrt{(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2} < \delta.$$

- $f(x,y) \in B_\varepsilon(l) \iff |f(x,y) - l| < \varepsilon.$

CASO 4: função $\vec{f}: \Omega \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ (função vetorial).

Dados $a \in \Omega' \subset \mathbb{R}$, $\vec{\ell} = (\ell_1, \ell_2, \ell_3) \in \mathbb{R}^3$;

então:

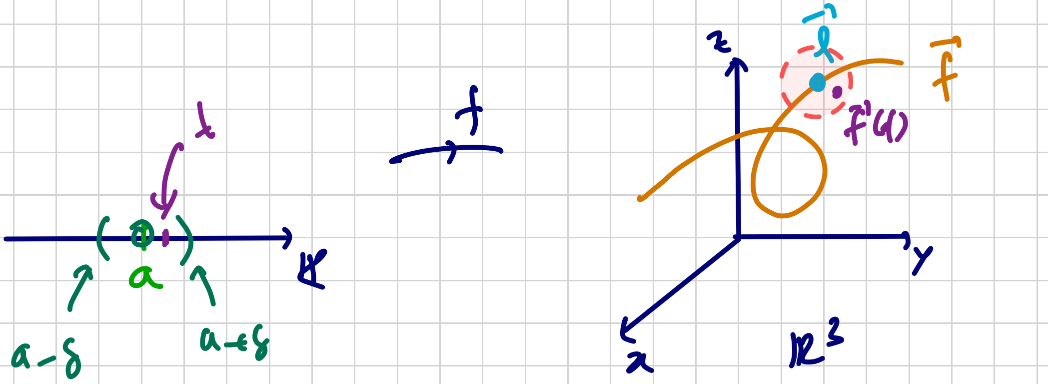
$\lim_{t \to a} \vec{f}(t) = \vec{\ell} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que, $\forall t \in \Omega$:

$$\underbrace{t \in B_\delta(a) \setminus \{a\}}_{0 < |t-a| < \delta} \Longrightarrow \underbrace{\vec{f}(t) \in B_\varepsilon(\vec{\ell})}.$$

$$d_2(\vec{f}(t), \vec{\ell}) < \varepsilon$$

$$\|$$

$$\sqrt{(f_1(t) - \ell_1)^2 + (f_2(t) - \ell_2)^2 + (f_3(t) - \ell_3)^2} < \varepsilon.$$



Vejamos um exemplo de aplicação:

Ex.: Prove que $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} (3x-5y) = 1$

Solução: Dado $\varepsilon>0$, precisamos encontrar $\delta>0$, tal que, $\forall x \in D(f)$: $(x,y) \in B_\delta(2,1) \setminus \{(2,1)\}$, implique em $f(x,y) \in B_\varepsilon(1)$.

Ou seja, achar $\delta>0$ tal que,

$$|f(x,y) - 1| < \varepsilon \,,$$

sempre que $0 < d_2((x,y),(2,1)) < \delta$, isto é,

$$0 < \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} < \delta. \quad (*)$$

Analisando a distância $|f(x,y) - 1|$, obtemos:

$$|f(x,y) - 1| = |3x - 5y - 1| = |\underline{3x - 6} + 6 - 5y - 1| =$$

de algum modo precisamos fazer aparecer os termos $x-2$ e $y-1$

$$= |3(x-2) - 5y+5| = |3(x-2) - 5(y-1)| \leq$$

DESIGUALDADE TRIANGULAR DO MÓDULO.

$$\leq 3.|x-2| + 5.|y-1|.$$

Então, obtemos a seguinte estimativa:

$$|f(x,y)-1| \leq 3.|x-2| + 5.|y-1|$$

Note que:

- $|x-2| = \sqrt{(x-2)^2} \leq \sqrt{(x-2)^2 + \underbrace{(y-1)^2}_{\geq 0}} < \delta.$

  $|a| = \sqrt{a^2}$

  por (*)

- $|y-1| = \sqrt{(y-1)^2} \leq \sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2} < \delta.$

Desse modo, obtém-se a estimativa:

$$|f(x,y)-1| \leq 3.\underbrace{|x-2|}_{<\delta} + 5\underbrace{|y-1|}_{<\delta} < 3\delta + 5\delta = 8\delta := \varepsilon$$

Assim, basta tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{8}$.

Isso prova que $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} 3x - 5y = 1$.

$\square$

<u>PROPOSIÇÃO</u> - (UNICIDADE DO LIMITE) O limite de uma função $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, se existir, é único.

<u>DEMONSTR.</u>: Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ função, $a \in \Omega'$ (i.e., $a \in \mathbb{R}^m$ um ponto de acumulação do conj. Ω).

Suponha que

$$\lim_{x\to a} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}^n \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a} f(x) = l_2 \in \mathbb{R}^n.$$

Vamos mostrar que $l_1 = l_2$.

Por absurdo, suponha que $l_1 \neq l_2$.

Tome $\varepsilon = \frac{1}{2} d(l_1, l_2) > 0$.

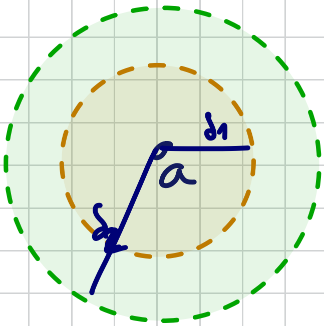
Como $\lim_{x \to a} f(x) = \ell_1$, então, $\exists\, \delta_1 > 0$, tal que,

$$\forall x \in \Omega : \quad x \in B_{\delta_1}(a) \setminus \{a\} \Longrightarrow f(x) \in B_{\varepsilon}(\ell_1) \quad (*)$$

Além disso, como $\lim_{x \to a} f(x) = \ell_2$, segue que

$\exists\, \delta_2 > 0$ tal que, $\forall x \in \Omega$:

$$x \in B_{\delta_2}(a) \setminus \{a\} \Longrightarrow f(x) \in B_{\varepsilon}(\ell_2) \quad (**)$$



Tome $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$

Assim, $\forall x$ tal que

$$x \in B_{\delta}(a) \setminus \{a\},$$

valem simultaneamente $(*)$ e $(**)$. Ou seja, valem

$$d(f(x), \ell_1) < \varepsilon \quad e \quad d(f(x), \ell_2) < \varepsilon,$$

sempre que $x \in B_{\delta}(a) \setminus \{a\}$.

Porém, note que:

$$d(l_1, l_2) \le \underbrace{d(l_1, f(u))}_{<\varepsilon} + \underbrace{d(f(y), l_2)}_{<\varepsilon} < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

DESIGUALDADE TRIANGULAR

Ou seja, obtemos

$$d(l_1, l_2) < 2\varepsilon.$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2} d(l_1, l_2)}_{=\varepsilon} < \varepsilon \Rightarrow \varepsilon < \varepsilon.$$

Absurdo!

Portanto, $l_1 = l_2$, ou seja, vale a unicidade do limite.

$\square$